調和点列と外相似の四円定理

平田 浩一

1. はじめに

この小論においては外相似の四円定理[2],[3]が調和点列、さらには射影幾何学と深く関わっていることについて考察する。外相似の四円定理は池田の定理と同様にその結論として 4 円の半径の間に成り立つ美しい関係式が導かれることがその特徴である。

筆者は[4] [5]において、池田の定理の一般化について議論を行った。また、池田の定理と外相似の四円定理の間の関係については[6]にて触れている。これらの定理は共に幾何学的にとても興味ある研究対象である。

2. 調和点列

1 直線上の 4 点 A, B, C, D に対して、

$$(\mathrm{AB};\mathrm{CD}) = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\overrightarrow{\mathrm{BC}}} \Big/ \frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{\overrightarrow{\mathrm{BD}}}$$

を 4 点の複比という。特に複比が -1 となるき 4 点 A, B, C, D は調和点列をなすといい、記号 $H(\mathrm{AB;CD})$ で表す。4 点 A, B, C, D が調和点列であれば、$\overrightarrow{\mathrm{AC}}:\overrightarrow{\mathrm{BC}} = -\overrightarrow{\mathrm{AD}}:\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ となるので、線分 AB に対して 2 点 C と D は同じ比での内分点と外分点の関係にある。

点 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_\mathrm{n}$ がありどの 3 点も共線でないとき、n 個の点は一般の位置にあると呼ぶことにする。調和点列の性質として次の定理 1 が成り立つ。証明はここでは省略する。

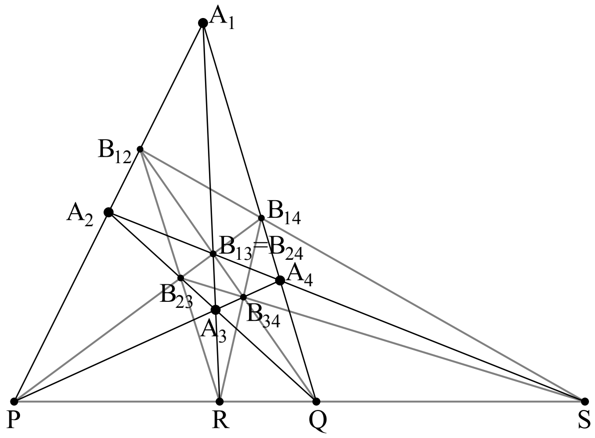

図 1 定理 1

定理 1 一般の位置にある 4 点 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ があり、2 直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ と $\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$ の交点を P、2 直線 $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ と $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_4$ の交点を Q、直線 PQ と 2 直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$, $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4$ の交点をそれぞれ R,S とする。

さらに、6 点 B_{ij} を

$H(\mathrm{A_1A_2;PB_{12}})$, $H(\mathrm{A_3A_4;PB_{34}})$, $H(\mathrm{A_2A_3;QB_{23}})$, $H(\mathrm{A_1A_4;QB_{14}})$, $H(\mathrm{A_1A_3;RB_{13}})$, $H(\mathrm{A_2A_4;RB_{24}})$
により定める。このとき次の (i)〜(iii) が成り立つ。

(i) $\mathrm{B_{13} = B_{24}}$

(ii) 4 点 $\mathrm{P, B_{13}(= B_{24}), B_{23}, B_{14}}$ は共線、4 点 $\mathrm{Q, B_{13}(= B_{24}), B_{34}, B_{12}}$ は共線

(iii) 3 点 $\mathrm{R, B_{12}, B_{23}}$ は共線、3 点 $\mathrm{R, B_{14}, B_{34}}$ は共線、3 点 $\mathrm{S, B_{12}, B_{14}}$ は共線、3 点 $\mathrm{S, B_{23}, B_{34}}$ は共線

円をその中心 A と半径 r とのペアとみなし $\mathrm{(A, r)}$ と表すことにする。2 円 $\mathrm{(A_1, r_1), (A_2, r_2)}$ が与えられたとき、線分 $\mathrm{A_1A_2}$ を $\mathrm{r_1 : r_2}$ に内分する点を 2 円の内相似中心といい記号 $\mathrm{I_{12}}$ で表すことにし、また、線分 $\mathrm{A_1A_2}$ を$\mathrm{r_1 : r_2}$ に外分する点を 2 円の外相似中心といい記号 $\mathrm{O_{12}}$ で表すことにする。2 円に共通内接線が存在するときはその交点が内相似中心であり、共通外接線が存在するときはその交点が外相似中心である。このとき、4 点 $\mathrm{A_1, A_2, I_{12}, O_{12}}$ は調和点列 $\mathrm{H(A_1A_2; I_{12}O_{12})}$ をなす。

円 $\mathrm{(A_1, r_1), (A_2, r_2), \ldots, (A_n, r_n)}$ がありその中心が一般の位置にあるとき、n 個の円は一般の位置にあると呼ぶことにする。次の定理はモンジュの定理としてよく知られている[1, p.269]。

定理 2（モンジュ） 一般の位置にある 3 円 $\mathrm{(A_1, r_1), (A_2, r_2), (A_3, r_3)}$ が与えられたとき次の(i), (ii) が成り立つ。

(i) 3 点 $\mathrm{O_{12}, O_{13}, O_{23}}$ は共線

(ii) 3 点 $\mathrm{O_{12}, I_{13}, I_{23}}$ は共線、3 点 $\mathrm{I_{12}, O_{13}, I_{23}}$ は共線、3 点 $\mathrm{I_{12}, I_{13}, O_{23}}$ は共線

3. 外相似の四円定理

次の定理は小曽根[2]の外相似の四円定理である。

定理 3（外相似の四円定理） 一般の位置にある 4 円 $\mathrm{(A_1, r_1), (A_2, r_2), (A_3, r_3), (A_4, r_4)}$ が与えられ $\mathrm{O_{12} = O_{34}}$ と $\mathrm{O_{23} = O_{14}}$ が成り立つと仮定する。このとき

$$\frac{1}{\mathrm{r_1}} + \frac{1}{\mathrm{r_3}} = \frac{1}{\mathrm{r_2}} + \frac{1}{\mathrm{r_4}}$$

が成り立つ。

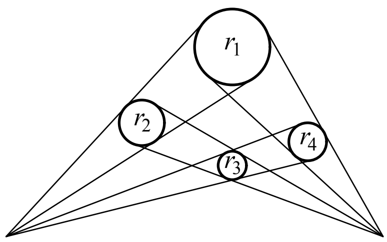

図 2 外相似の四円定理

この定理の背後にあるのは調和点列についての定理 1 である。

定理 4 一般の位置にある 4 円 $\mathrm{(A_1, r_1), (A_2, r_2), (A_3, r_3), (A_4, r_4)}$ が与えられ $\mathrm{O_{12} = O_{34}}$と$\mathrm{O_{23} = O_{14}}$ が成り立つと仮定する。このとき、次の (i)〜(iv) が成り立つ。

(i) 4 点 $\mathrm{O_{12}(= O_{34}), O_{23}(= O_{14}), O_{13}, O_{24}}$ は共線

(ii) $\mathrm{I_{13} = I_{24}}$

(iii) 4 点 $\mathrm{O_{12}(= O_{34}), I_{13}(= I_{24}), I_{23}, I_{14}}$ は共線、4 点 $\mathrm{O_{23}(= O_{14}), I_{13}(= I_{24}), I_{12}, I_{34}}$ は共線

(iv) 3 点 $\mathrm{O_{13}, I_{12}, I_{13}}$ は共線、3 点$\mathrm{O_{13}, I_{14}, I_{34}}$は共線、3 点 $\mathrm{O_{24}, I_{12}, I_{14}}$ は共線、3 点 $\mathrm{O_{24}, I_{23}, I_{34}}$ は共線

（証明） ４円から３円を選ぶ方法は４通りあり､それぞれに対し定理２(i)を適用すれば (i) を得る。そこで $\mathrm{P}=\mathrm{O}_{12}(=\mathrm{O}_{34}), \mathrm{Q}=\mathrm{O}_{23}(=\mathrm{O}_{14}), \mathrm{R}=\mathrm{O}_{13}, \mathrm{S}=\mathrm{O}_{24}$ とおくことで定理１が適用でき (ii)〜(iv) を得る。

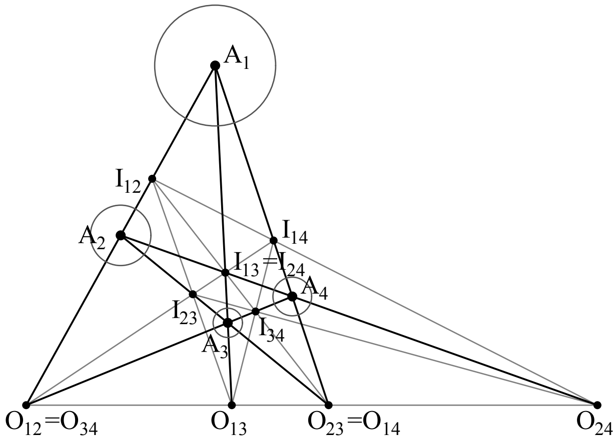

図 3 定理 4

次の定理は小曽根 [3] の結果である。

定理 5 一般の位置にある４円 $(\mathrm{A}_1,r_1),(\mathrm{A}_2,r_2),(\mathrm{A}_3,r_3),(\mathrm{A}_4,r_4)$ が与えられている。このとき次の (i)〜(iv) のいずれか２つが成り立てば、他の２つも成り立つ。

(i) $\mathrm{O}_{12}=\mathrm{O}_{34}$,　(ii) $\mathrm{O}_{23}=\mathrm{O}_{14}$,　(iii) $\mathrm{I}_{13}=\mathrm{I}_{24}$.　(iv) $\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_3}=\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_4}$

4. 類似した定理

最初に述べた定理１を定理４に応用するときと同様にして、今度は点 P が２円(A_1,r_1), (A_2,r_2) の内相似中心 I_{12} でかつ２円 $(\mathrm{A}_3,r_3),(\mathrm{A}_4,r_4)$ の外相似中心 O_{34} である場合に適用してみよう。

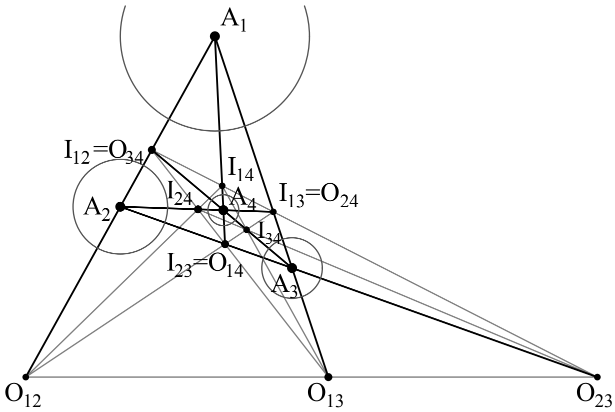

図 4 定理 6

定理 6 一般の位置にある４円 $(\mathrm{A}_1,r_1),(\mathrm{A}_2,r_2),(\mathrm{A}_3,r_3),(\mathrm{A}_4,r_4)$ が与えられ $\mathrm{I}_{12}=\mathrm{O}_{34}$ と $\mathrm{I}_{23}=\mathrm{O}_{14}$ が成り立つと仮定する。このとき次の (i)〜(iv) が成り立つ。

(i)　４点 $\mathrm{I}_{12}(=\mathrm{O}_{34}),\mathrm{I}_{23}(=\mathrm{O}_{14}),\mathrm{O}_{13},\mathrm{I}_{24}$ は共線

(ii)　$\mathrm{I}_{13}=\mathrm{O}_{24}$

(iii)　4 点 $\mathrm{I}_{12}(=\mathrm{O}_{34}),\mathrm{I}_{13}(=\mathrm{O}_{24}),\mathrm{O}_{23},\mathrm{I}_{14}$ は共線、4 点 $\mathrm{I}_{13}(=\mathrm{O}_{24}),\mathrm{I}_{23}(=\mathrm{O}_{14}),\mathrm{O}_{12},\mathrm{I}_{34}$ は共線

(iv)　3 点 $\mathrm{O}_{12},\mathrm{O}_{13},\mathrm{O}_{23}$ は共線、3 点 $\mathrm{O}_{12},\mathrm{I}_{14},\mathrm{I}_{24}$ は共線、3 点 $\mathrm{O}_{13},\mathrm{I}_{14},\mathrm{I}_{34}$ は共線、3 点 $\mathrm{O}_{23},\mathrm{I}_{24},\mathrm{I}_{34}$ は共線

（証明）　4 円から 3 円を選ぶ 4 通りに対し定理 2 (i)(ii)を適用すれば (i) を得る。$\mathrm{P}=\mathrm{I}_{12}(=\mathrm{O}_{34}), \mathrm{Q}=\mathrm{I}_{23}(=\mathrm{O}_{14}), \mathrm{R}=\mathrm{O}_{13}, \mathrm{S}=\mathrm{I}_{24}$ とおくことで、定理 1 が適用でき (ii)～(iv) を得る。

定理 7　一般の位置にある 4 円 $(\mathrm{A}_1,r_1),(\mathrm{A}_2,r_2),(\mathrm{A}_3,r_3),(\mathrm{A}_4,r_4)$ が与えられ $\mathrm{I}_{12}=\mathrm{O}_{34}$ と $\mathrm{I}_{23}=\mathrm{O}_{14}$ が成り立つと仮定する。このとき

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_4}$$

が成り立つ。

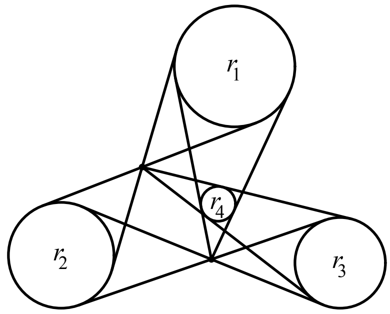

図 5 定理 7

（証明）　三角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{I}_{12}\mathrm{A}_3$ と点 I_{23} についてチェバの定理を用いることで

$$\frac{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}{\mathrm{A}_2\mathrm{I}_{12}}\cdot\frac{\mathrm{I}_{12}\mathrm{A}_4}{\mathrm{A}_4\mathrm{A}_3}\cdot\frac{\mathrm{A}_3\mathrm{O}_{13}}{\mathrm{O}_{13}\mathrm{A}_1}=\frac{r_1+r_2}{-r_2}\cdot\frac{r_4}{r_3-r_4}\cdot\frac{-r_3}{r_1}=\frac{r_1r_3r_4+r_2r_3r_4}{r_1r_2r_3-r_1r_2r_4}=\frac{1/r_2+1/r_1}{1/r_4-1/r_3}=1$$

となり求める式が導かれる。

定理 8　一般の位置にある 4 円 $(\mathrm{A}_1,r_1),(\mathrm{A}_2,r_2),(\mathrm{A}_3,r_3),(\mathrm{A}_4,r_4)$ が与えられている。このとき次の (i)～(iv) のいずれか 2 つが成り立てば、他の 2 つも成り立つ。

(i) $\mathrm{I}_{12}=\mathrm{O}_{34}$,　　(ii) $\mathrm{I}_{23}=\mathrm{O}_{14}$,　　(iii) $\mathrm{I}_{13}=\mathrm{O}_{24}$.　　(iv) $\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3}=\dfrac{1}{r_4}$

（証明）　定理 6 と定理 7 により証明はほぼできているので、残るは(i)と(iv)から(ii)を示すのみである。定理 6 (i)の証明と同様にして、4 点 $\mathrm{I}_{12},\mathrm{I}_{23},\mathrm{O}_{14},\mathrm{O}_{13}$ は共線となる。そこで三角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{I}_{12}\mathrm{A}_3$ とその 3 辺上の 3 点 $\mathrm{A}_4,\mathrm{O}_{13},\mathrm{A}_2$ について定理 7 の証明の式と同じ式が成り立ち、チェバの定理の逆により 3 直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_4,\mathrm{I}_{12}\mathrm{O}_{13},\mathrm{A}_3\mathrm{A}_2$ は共点となる。従って (ii) が成り立つ。

参考文献

[1] 岩田至康編、『幾何学大辞典』第 1 巻、槇書店、1971.

[2] 小曽根淳、和算の曲率問題について、数学史研究、230 (2018)、18-29.

[3] 小曽根淳、外相似の四円定理と内相似中心について、2018 年 3 月.

[4] 平田浩一・四宮雅士、池田の定理の拡張について、愛媛大学教育学部紀要、65 (2018)、137-142.

[5] 平田浩一、池田の定理の一般化と重心の役割について、日本数学教育学会高専・大学部会論文誌、25-1 (2019)、9-20.

[6] 平田浩一、外相似の四円定理と池田の定理について、愛媛和算研究会発表資料、2021 年 8 月、https://khirata.com/2021/08/512/