

池田の定理の一般化と重心の役割について

平田浩一 *

On Generalizations of Ikeda's Theorem and the Role of the Centroid

Koichi HIRATA *

Abstract: Ikeda's theorem is a theorem related to the Steiner chain. It was written on the sangaku tablet dedicated by Sadakazu Ikeda to the Chomeiji Temple in Tokyo during the Edo period. The purpose of this paper is to attempt various generalizations of the theorem and to analyze the properties of figures behind them. In the process, we introduce the fact that the centroid of n points is greatly related to the proof.

Keywords: wasan, sangaku, Steiner chain, Ikeda's theorem, generalization of Ikeda's theorem, centroid.

1 はじめに

この研究の目的は、池田貞一が1826年に長命寺に奉納した算額の問題に由来する池田の定理について、その定理の一般化を試み、さらにその定理の背後にある図形の性質について解析を行うことである。その過程で、 n 個の円の中心による重心が証明に大きく関わっていることを紹介する。

池田の算額に書かれた問題と解を現代風書き表すと次のようになる ([1] p. 149, [2] p. 284, [3] p. 57)。

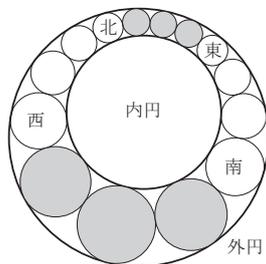


図1 池田貞一の算額の図

図1のように、外円と内円との間に偶数個の円が環状に接している。このとき2組の相対

* 愛媛大学教育学部, Faculty of Education, Ehime University, e-mail : hirata@ehime-u.ac.jp

する円の直径を東，西と南，北とするととき，次の関係式

$$\frac{1}{\text{東}} + \frac{1}{\text{西}} = \frac{1}{\text{南}} + \frac{1}{\text{北}}$$

が成り立つ．

この小論では，第2節でシュタイナー円鎖と池田の定理について述べ，第3節で一般化に必要な補題を用意し，第4節で池田の定理の一般化を行い，第5節で一般化された池田の定理を証明する．

2 シュタイナー円鎖と池田の定理

池田の定理はシュタイナー円鎖に関するものなので，シュタイナー円鎖について説明することから始める．

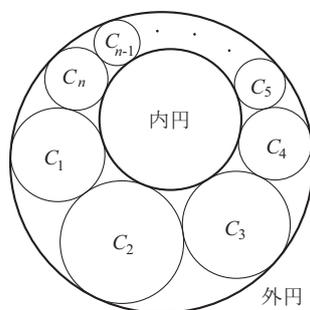


図2 シュタイナー円鎖

図2のように，外円とその内部の内円が与えられているとする．外円と内円に同時に接する1つの円を C_1 とする．次に，外円と内円に接し，かつ C_1 に外接する1つの円を C_2 とする．続いて，外円と内円に接し，かつ C_2 に外接する2円のうち C_1 と異なるものを C_3 とする．以下同様にこの操作を繰り返して，順に円 C_1, C_2, \dots, C_n をとる．最後に， C_1 と C_n がちょうど外接するとき，このようにして得られた図形を n 個の円のなすシュタイナー円鎖またはシュタイナー環と呼ぶ．

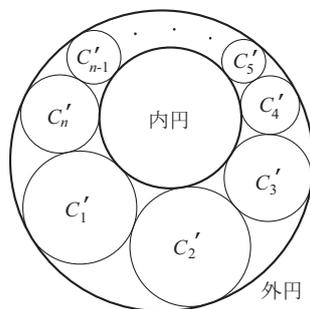


図3 シュタイナー円鎖の性質

n 個の円のなすシュタイナー円鎖が1つあるとき，その外円と内円は動かさずに，図3のように，最初に選ぶ円を別の円 C'_1 に取り換えて，同じ手順で C'_1, C'_2, C'_3, \dots をとるとどうなるだろうか．このときも2円 C'_1 と C'_n が外接し， n 個の円からなるシュタイナー円鎖になることが知られている ([2] p. 284)．

補題 1 外円とその内部の内円が与えられている．その外円と内円に対し， n 個の円のなすシュタイナー円鎖が 1 つ作られるならば，最初の円の位置をどこに取ったとしても n 個の円のなすシュタイナー円鎖が作られる．

この補題の証明には，次の反転の性質が用いられる．反転の定義と性質を簡単にまとめる．

定義 1 図 4 のように，点 P を中心とする半径 r の円が与えられている．平面上の任意の点 X に対して関係式 $PX \cdot PX' = r^2$ を満たす半直線 PX 上の点 X' を対応させる写像 $X \mapsto X'$ を反転という．このとき，円 P を反転円，点 P を反転中心， r を反転半径という．

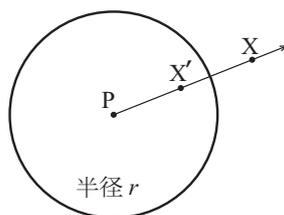


図 4 反転の定義

この定義のままでは，反転中心 P に対する反転像が定義されない．そこで無限遠点 ∞ を導入し，反転中心の反転像を無限遠点とし，無限遠点の反転像を反転中心と定める．つまり，平面 R^2 の 1 点コンパクト化を $S^2 \simeq R^2 \cup \{\infty\}$ とするとき，反転は連続な全単射 $S^2 \rightarrow S^2$ となる．

反転の性質 直線と円の反転による像は次のようになる．

- (1) 反転中心を通る直線はその直線自身に移る．
- (2) 反転中心を通らない直線は反転中心を通る円に移る．
- (3) 反転中心を通る円は反転中心を通らない直線に移る．
- (4) 反転中心を通らない円は反転中心を通らない円に移る．

次の補題はよく知られている ([2] p. 427, [4] P. 30)．

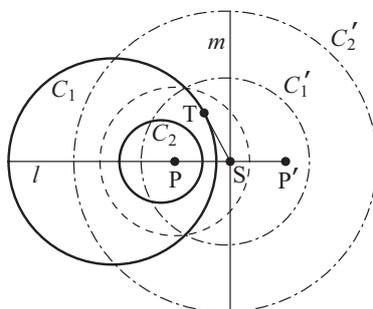


図 5 同心円化

補題 2 (同心円化) 図 5 のように，共有点をもたず同心円でもない 2 円 C_1, C_2 (実線) があるとき，中心が P または P' の反転円 (破線) による反転で，2 円を同心円 C'_1, C'_2 (一点

鎖線)に移すことができる．ここで， l は 2 円の中心を結ぶ直線， m は 2 円の根軸[†]で，それらの交点 S から円に引いた接線を ST とし， $ST = SP$ となる直線 l 上の点が P, P' である．

(補題 1 の証明) 図 2 のように n 個の円 C_1, \dots, C_n のなすシュタイナー円鎖があるとき，補題 2 によりある反転で図 6 のように外円と内円が同心円となるように移すことができる．従って反転の連続性より，反転で移る n 個の円は互いに接していて，さらに内円と外円にも接するので，すべて同じ半径となる．これら n 個の円を少し移動させ，同じ反転で元に戻すことで図 3 のようなシュタイナー円鎖が得られる． □

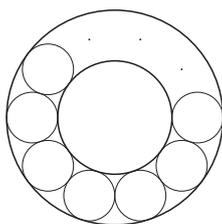


図 6 反転で同心円にする

シュタイナー円鎖を用いて，池田の定理を一般的に表すと次のようになる．

定理 1 (池田の定理) n を 2 以上の自然数とする．図 7 のように， $2n$ 個の円のなすシュタイナー円鎖があり，その半径を r_1, r_2, \dots, r_{2n} とする．このとき，各 i ($1 \leq i \leq n$) に対して

$$\lambda_i = \frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_{i+n}}$$

は同じ値をとる．

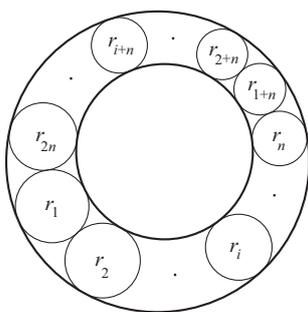


図 7 池田の定理

ここで，補題 1 を使って，最初の円 C_1 を少しずらして別の n 個の円からなるシュタイナー円鎖を作ったらどうなるであろうか．ずらした円の半径を $r'_1, r'_2, \dots, r'_{2n}$ とすれば，池田の定理 1 により，各 j ($1 \leq j \leq n$) に対して

$$\lambda'_j = \frac{1}{r'_j} + \frac{1}{r'_{j+n}}$$

[†] 2 円に対して，点 X から 2 円に引いた接線の長さが等しくなる（より正確には，後述の方べきが等しくなる）ような点 X の軌跡は直線となり，その直線を根軸という．2 円が交わる場合は 2 交点を結ぶ直線が根軸である．

は同じ値をとることになる．しかしながら， λ_i と λ_j が等しいかどうかについては，定理 1 は何も答えてくれない．そこでより強い池田の定理が必要となる．

先ほどの補題 1 により， n 個の円のなすシュタイナー円鎖が与えられたとき，最初の円 C_1 を少しずつ移動させるとき n 個の円は外円と内円の間を互いに接しながら連続的に回転することになる．この動きをシュタイナー円鎖の回転と呼ぶことにする．

定理 2 (強い池田の定理) n を 2 以上の自然数とする．図 7 のように， $2n$ 個の円のなすシュタイナー円鎖があり，その半径を r_1, r_2, \dots, r_{2n} とする．このとき，

$$\lambda = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_{1+n}}$$

はシュタイナー円鎖の回転で不変である．

元の池田の定理では n 個 (有限個) の値が等しいとしかいっていないのに対し，強い池田の定理ではシュタイナー円鎖の回転で半径 r_1, r_{1+n} が連続的に値が変化しても，それでも λ の値は不変と主張しているのでより強い定理となっている．両者の証明の違いはというと，証明方法にもよるが，元の池田の定理の証明方法を少し修正するだけで強い池田の定理となる場合が多い．

平田・四宮 [5] は池田の定理を次のように拡張している．

定理 3 m, n を 2 以上の自然数とする．図 8 のように mn 個の円が内接するシュタイナー円鎖があり，その半径を r_1, r_2, \dots, r_{mn} とする．このとき，各 i ($1 \leq i \leq n$) に対して

$$\lambda_i = \frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_{i+n}} + \frac{1}{r_{i+2n}} + \dots + \frac{1}{r_{i+(m-1)n}}$$

は同じ値をとる．

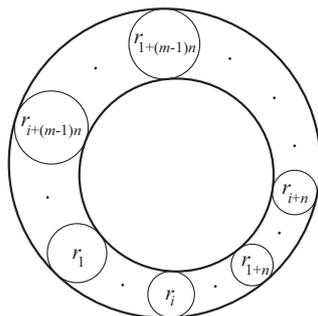


図 8 池田の定理の拡張

この定理もシュタイナー円鎖の回転を使って強い定理として書き直すことができる．

定理 4 m, n を 2 以上の自然数とする．図 8 のように mn 個の円が内接するシュタイナー円鎖があり，その半径を r_1, r_2, \dots, r_{mn} とする．このとき，

$$\lambda = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_{1+n}} + \frac{1}{r_{1+2n}} + \dots + \frac{1}{r_{1+(m-1)n}}$$

はシュタイナー円鎖の回転で不変である．

3 方べきと反転公式

次に円 C と点 Q に対して定まる値として, 方べき $h(C, Q)$ を定義する.

定義 2 円 C と点 Q に対し, 方べき $h(C, Q)$ を

$$h(C, Q) = QO^2 - r^2$$

と定義する. ここで, O と r はそれぞれ円 C の中心と半径である.

方べき $h(C, Q)$ は, 点 Q が円 C の内部にあるとき値が負で, 点 Q が円 C の周上にあるとき値が 0 となることに注意しよう. 方べきの定義と方べきの定理との関係は次のようになる.

補題 3 円 C と点 Q が与えられている. 点 Q を通る任意の直線が円 C と 2 点 A, B で交わるとき次が成り立つ.

- (1) 点 Q が円 C の外部にあるとき, $QA \cdot QB = h(C, Q)$
- (2) 点 Q が円 C の内部にあるとき, $QA \cdot QB = -h(C, Q)$

(証明) 点 Q を通る直径と円 C との交点を C, D とする. 点 Q が円 O の外部にあれば図 9(1) のようになり, 方べきの定理より $QA \cdot QB = QC \cdot QD$ なので,

$$QA \cdot QB = QC \cdot QD = (QO - r)(QO + r) = h(C, Q)$$

となる. 点 Q が円 O の内部にあれば図 9(2) のようになり, 同様に方べきの定理より $QA \cdot QB = QC \cdot QD$ なので,

$$QA \cdot QB = QC \cdot QD = (r - QO)(r + QO) = -h(C, Q)$$

となる. □

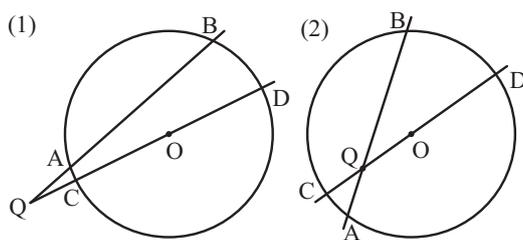


図 9 補題 3 の証明

次に円の曲率を定義する. そのために円に「反時計回り」と「時計回り」の向きをつける.

定義 3 半径 r の円 C の曲率 k を

$$k = \begin{cases} \frac{1}{r} & \text{円 } C \text{ の向きが反時計回りのとき} \\ -\frac{1}{r} & \text{円 } C \text{ の向きが時計回りのとき} \end{cases}$$

と定める. また, 直線の曲率は $k = 0$ とする.

反転と円の向きとの関係は、図 10 のように反転中心を P とする反転で円 C が円 C' に移るとき、

- (1) 点 P が円 C の内部にあれば、点 P は円 C' の内部にあり、C と C' は同じ向き
- (2) 点 P が円 C の外部にあれば、点 P は円 C' の外部にあり、C と C' は反対向きとなる。また、反転円自身の向きは反転には関係しない。

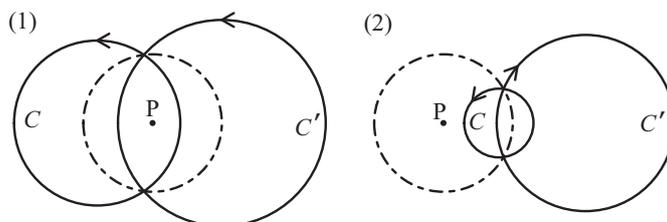


図 10 反転と円の向きとの関係

補題 4 中心が P で曲率が \bar{k} の反転円により、曲率 k の円 C が曲率 k' の円 C' に移るとき、

$$k' = -\bar{k}^2 k h(C, P)$$

が成り立つ。この式は C' が直線となる場合も成り立つ。

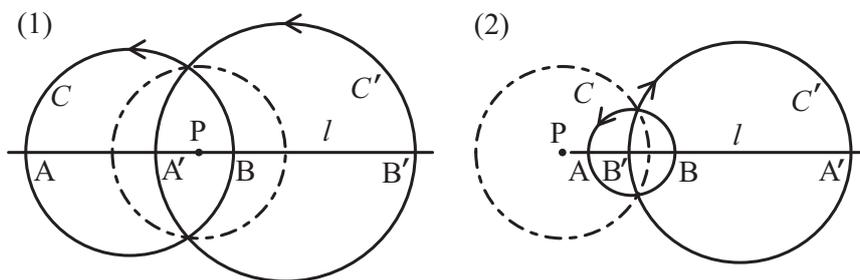


図 11 補題 4 の証明

(証明) 図 11 のように、点 P と 2 円 C, C' の中心を通る直線を l とし、円 C と直線 l の交点を A, B, 反転による A, B の像をそれぞれ A', B' とする。また $PA = a, PB = b, PA' = a', PB' = b'$ とおくと、反転の定義により

$$aa'\bar{k}^2 = 1, \quad bb'\bar{k}^2 = 1$$

である。そこで、点 P の位置で場合分けする。

(点 P が円 C の内部にあるとき) 図 11(1) のような位置関係にあるので、 $k, k' > 0$ と仮定すると、曲率と方べきの定義により

$$k(a + b) = 2, \quad k'(a' + b') = 2, \quad h(C, P) = -ab$$

となる。従って

$$k' = \frac{2}{a' + b'} = \frac{2}{\frac{1}{a\bar{k}^2} + \frac{1}{b\bar{k}^2}} = \bar{k}^2 ab \frac{2}{a + b} = -\bar{k}^2 k h(C, P)$$

となる． $k, k' < 0$ の場合は， $k(a+b) = -2$ ， $k'(a'+b') = -2$ となるが，結果は同様である．
 (点 P が円 C の外部にあるとき) 図 11(2) のような位置関係にあるので， $k > 0, k' < 0$ と仮定すると，曲率と方べきの定義により

$$k|a-b| = 2, \quad k'|a'-b'| = -2, \quad h(C, P) = ab$$

となる．従って

$$k' = \frac{-2}{|a'-b'|} = \frac{-2}{\left| \frac{1}{a\bar{k}^2} - \frac{1}{b\bar{k}^2} \right|} = \bar{k}^2 ab \frac{-2}{|a-b|} = -\bar{k}^2 kh(C, P)$$

となる． $k < 0, k' > 0$ の場合は， $k|a-b| = -2$ ， $k'|a'-b'| = 2$ となるが，結果は同様である．

最後に，円 C' が直線となるのは反転中心 P が円 C の周上にあるときなので， $h(C, P) = 0$ で $k' = 0$ となるので，両辺共に 0 となることで，補題が成り立つ． □

上の補題 4 を曲率ではなく半径で表すと，円の向きが無視されて，よく知られた次の反転公式となる ([2] p. 427, [3] p. 15, [4] p. 30)．

系 1 中心が P で半径が \bar{r} の反転円により，半径 r の円 C が半径 r' の円 C' に移るとき，

$$r' = \frac{\bar{r}^2}{|h(C, P)|} r$$

が成り立つ．

4 池田の定理の一般化

この節で池田の定理を順を追って一般化していくが，証明は一般化した最後の定理 8 についてだけ次節でつけることにする．そうすることでそれ以前の定理はすべて系として証明されることになるからである．以後，前節で定義した曲率を使って定理を記述することにする．

定理 4 からシュタイナー円鎖 (隣の円と接している) という条件をはずすことで，次のように一般化できる．隣の円とは離れていても交わっていても構わないが， n 個の円の中心が正 n 角形をなすことが条件である．

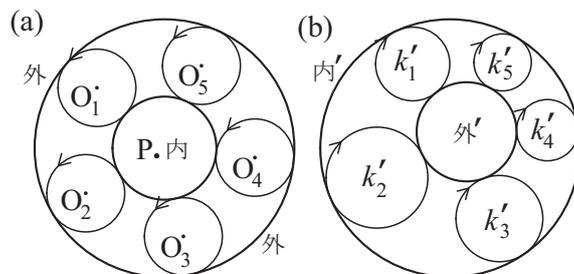


図 12 定理 5 の $n = 5$ の場合

定理5 図12(a)のように外円と内円が原点を中心とする同心円でその間に n 個の円が接し、それらの円の中心 O_1, \dots, O_n が正 n 角形をなし、 n 個の円はみな同じ向きとする。それをある反転中心 P で反転させて得られる図12(b)の n 個の円の曲率を k'_1, \dots, k'_n とする。図12(a)の n 個の円が原点の周りを等速に同じ向きに回転するとき、反転で得られる図12(b)の n 個の円も回転する。この回転で

$$\lambda = k'_1 + k'_2 + \dots + k'_n$$

は不変である。

図12は、反転中心 P が内円の内部にある図となっている。そのため (a) の回転する n 個の円の向きがみな反時計回りのとき、(b) の n 個の反転像の向きはすべて時計回りで曲率 k'_i は負である。

次の図13は、反転中心 P の位置が異なっている。この (a) では反転中心 P が円 O_2 の内部に入っている。反転させると (b) のように、円 O_2 の反転像だけが反時計回りで、他の円の反転像は時計回りとなる。そのため曲率は k'_2 のみ正で他は負である。(a) の n 個の円の回転を続けると、点 P が円周上にとったり、場合によっては (2 円が交わっているときなどには) 点 P が同時に 2 円に含まれるなど、状況は刻々と変化する。それに従い曲率 k_i の値も符号も変化する。そのような値と符号の変化がある状況の中であっても、定理5により式 λ の値は不変である。

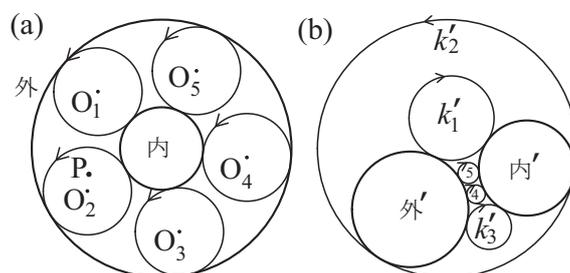


図13 定理5で点 P が円 O_2 の内部にある場合

さらに正多角形という条件をはずすと次のように一般化できる。ここからキーワードとして「重心」が登場する。

定理6 図14(a)のように外円と内円が原点を中心とする同心円でその間に n 個の円が接し、それらの円の中心を O_1, \dots, O_n とし、すべて同じ重さを持つとしてその重心が原点であると仮定する。また、 n 個の円はみな同じ向きとする。それをある反転中心 P で反転させて得られる図14(b)の n 個の円の曲率を k'_1, \dots, k'_n とする。図14(a)の n 個の円が原点の周りを等速に同じ向きに回転するとき、反転で得られる図14(b)の n 個の円も回転する。この回転で

$$\lambda = k'_1 + k'_2 + \dots + k'_n$$

は不変である。

次に、 n 個の円が外円と内円の間にはさまれているという条件をはずしてみる。

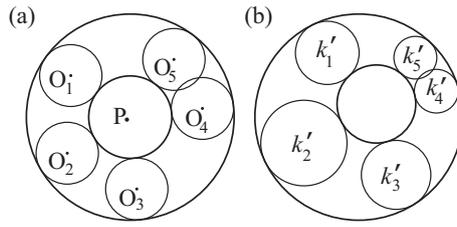


図 14 定理 6 の $n = 5$ の場合

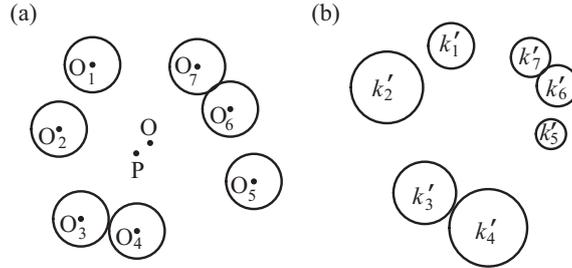


図 15 定理 7 の $n = 7$ の場合

定理 7 図 15(a) のように平面上に曲率が等しい n 個の円があり，それらの円の中心を O_1, \dots, O_n とし，すべて同じ重さを持つとしてその重心が原点 O であると仮定する．それをある反転中心 P で反転させて得られる図 15(b) の n 個の円の曲率を k'_1, \dots, k'_n とする．図 15(a) の n 個の円が重心 O の周りを互いの距離を保ったまま同じ向きに回転するとき，反転で得られる図 15(b) の n 個の円も回転する．この回転で

$$\lambda = k'_1 + k'_2 + \dots + k'_n$$

は不変である．

最後に，図 16(a) のように n 個の円の曲率が等しいという条件をはずす．円の向きも異なっていてよいとする．ただし注意することは，重心を求めるときには曲率 k_i の符号に注意して重心を求めることである．

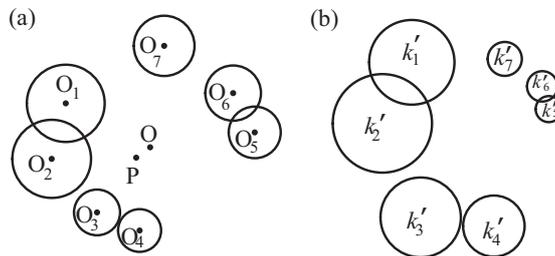


図 16 定理 8 の $n = 7$ の場合

定理 8 図 16(a) のように平面上に向きをもつ n 個の円があり，それらの中心を O_1, \dots, O_n とし，曲率を k_1, \dots, k_n ($\sum_{i=1}^n k_i \neq 0$) とする．各点 O_i の重さを k_i としたときの n 個の点の重心が原点 O であると仮定する．それをある反転中心 P で反転させて得られる図 16(b) の n 個の円の曲率を k'_1, \dots, k'_n とする．図 16(a) の n 個の円が重心 O の周りを互いの距離を保ったまま同じ向きに回転するとき，反転で得られる図 16(b) の n 個の円も回転する．この回

転で

$$\lambda = k'_1 + k'_2 + \cdots + k'_n$$

は不変である .

5 一般化された池田の定理の証明

高校の教科書に次のような軌跡の問題がある .

問題 1 2 点 A, B に対し , 「 $AP^2 + BP^2 = \text{一定}$ 」である点 P の軌跡を求めよ .

この問題の軌跡は AB の中点を中心とする円となる . これを n 点に拡張すると次の補題となり , 一般化された池田の定理を証明する際の鍵となる ([2] p. 299) .

補題 5 平面上の n 個の点 A_1, A_2, \dots, A_n と n 個の定数 w_1, w_2, \dots, w_n があり , 各点 A_i の重さを w_i としたときの n 個の点の重心を G とする . このとき

$$\sum_{i=1}^n w_i PA_i^2 = \text{一定}$$

である点 P の軌跡は G を中心とする円である . ただし , 各 w_i は正負どちらの値をとってもよいが , $\sum_{i=1}^n w_i \neq 0$ と仮定する .

(証明) 重心 G を起点として , $\overrightarrow{GA_i} = \mathbf{a}_i$, $\overrightarrow{GP} = \mathbf{p}$ とおくと , 重心の定義により

$$w_1 \mathbf{a}_1 + w_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + w_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

である . そこで $\sum w_i PA_i^2 = k$ とするとき ,

$$\begin{aligned} k &= \sum w_i PA_i^2 = \sum w_i |\mathbf{a}_i - \mathbf{p}|^2 \\ &= \sum w_i (|\mathbf{a}_i|^2 - 2\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{p} + |\mathbf{p}|^2) \\ &= \sum w_i |\mathbf{a}_i|^2 - 2 \left(\sum w_i \mathbf{a}_i \right) \cdot \mathbf{p} + \left(\sum w_i \right) |\mathbf{p}|^2 \\ &= \sum w_i |\mathbf{a}_i|^2 + \left(\sum w_i \right) |\mathbf{p}|^2 \end{aligned}$$

従って

$$|\mathbf{p}|^2 = \frac{k - \sum w_i |\mathbf{a}_i|^2}{\sum w_i} = \text{一定}$$

となり , この式の右辺が正であれば点 P の軌跡は G を中心とする円となる . □

補題 5 が意味することは , 点 P が G を中心とする円の周上を動くとき $\sum w_i PA_i^2$ は一定で変化しないことである . ここで見方を変えて , 点 P は動かさずに , n 点 A_1, \dots, A_n が G の周りを回転すると考えても , 同様に $\sum w_i PA_i^2$ は一定で変化しない . それが次の系 2 である .

系 2 平面上に n 個の点 A_1, \dots, A_n と n 個の定数 w_1, w_2, \dots, w_n があり , 各点 A_i の重さを w_i としたときの n 個の点の重心を G とする . また , P を定点とする . n 点 A_1, \dots, A_n が重

心 G の周りを互いの距離と重心を保ったまま同じ向きに回転するとき、

$$\sum_{i=1}^n w_i PA_i^2$$

の値は一定である。ただし、各 w_i は正負どちらの値をとってもよいが、 $\sum_{i=1}^n w_i \neq 0$ と仮定する。

これで証明の準備が整ったので、定理 8 の証明に取りかかる。

(定理 8 の証明) 図 16(a) のように平面上に定理 8 の仮定をみたす n 個の円があるとする。反転円の中心を P 、曲率を \bar{k} とし、各円 O_i に対する点 P の方べきを h_i とする。反転によって得られる円の曲率 k'_i は補題 4 により

$$k'_i = -\bar{k}^2 k_i h_i$$

である。そこで λ の値を計算すると、

$$\begin{aligned} \lambda &= \sum k'_i = -\sum \bar{k}^2 k_i h_i \\ &= -\bar{k}^2 \sum k_i \left(PO_i^2 - \frac{1}{k_i^2} \right) \\ &= -\bar{k}^2 \left(\sum k_i PO_i^2 - \sum \frac{1}{k_i} \right) \end{aligned}$$

となる。ここで、 k_i を系 2 の w_i とみなすことにより $\sum k_i PO_i^2$ は一定となり、従って λ は一定である。□

6 おわりに

池田の定理の一般化は卒業研究での学生との共同研究 [5] に始まる。その論文での主要な結果は定理 3 で、その証明には問題 1 を n 点に拡張した重心の性質を用いた。その証明から逆に、今度は池田の定理をどこまで一般化できるかを検討したことにより、この論文へと発展した。高校の数学の教科書によく用いられる軌跡の問題が、このようなところに深く関わっているとは驚きであった。

最後に、本研究は JSPS KAKENHI Grant Number JP17K00978 の研究助成を受けて行った研究成果である。

参考文献

- [1] 平山諦, 学術を中心とした和算史上の人々, 筑摩書房, 2008.
- [2] 岩田至康編, 幾何学大辞典 第 1 巻 基本定理と問題 (空間), 槇書店, 1971.
- [3] 田部井勝稲・松本登志雄, 高校数学で解く日本の図形問題 反転法と算変法, 一粒書房, 2014.
- [4] J. L. Coolidge, *A Treatise on the circle and the Sphere*, Oxford, 1916.
- [5] 平田浩一・四宮雅士, 池田の定理の拡張について, 愛媛大学教育学部紀要, 65 (2018), pp. 137–141.