

錐体の体積公式と等高重心立体に関する考察

平田浩一 *

A Study on Cones with Curved Surface Bottom which has the Same Volume Formula as the Pyramid and Solids that can Roll Smoothly without Changing the Height of the Center of Gravity

Koichi HIRATA *

Abstract: The volume formula of a pyramid is well known as $V = \frac{1}{3}hS$. The formula is always true for a cone with flat bottom. We consider a cone with curved surface bottom satisfying the same volume formula as the pyramid. As a result, it turned out that there are countless cones with such properties. The study also led to the discovery of countless solids that can roll smoothly on the floor without changing the height of the center of gravity. This paper reports on these research results.

Keywords: cone with curved surface bottom, volume formula of a cone, sphericon, solid that can roll smoothly on the floor

1 はじめに

角錐・円錐などの錐体の体積は「底面積×高さ÷3」という公式で求められる。底面が曲面の場合の錐体でも、同様な体積公式が成り立つものがないか調べてみた。その結果、そのような曲面を持つ錐体は無数に存在することが判明した。その研究からさらに、無数の等高重心立体の発見につながった。この論文ではこれらの研究成果について、特に等高重心立体の性質とその作成の方法について報告する。

2 研究の発端

和算書『精要算法』[1]の問題に、円錐台を斜めに切ったときの側面積を求めるものがある。問題を現代風に表現すると次のようになる。

問題 1 図1のように、円錐台を平面で斜めに切ることにより側面が分割されてできる2つの面積を S_1, S_2 とする。上底の半径を $r_1 = 45$ 、下底の半径を $r_2 = 80$ 、母線の長さを $k = 94.3$ とするとき、 S_1, S_2 を求めよ。

側面の展開図が図2であることから、我々は積分を使った計算問題だとすぐ思ってしまうのであるが、和算書『精要算法解』[2]の解答は、意外なものであった。円錐の側面の一部

*愛媛大学教育学部 Faculty of Education, Ehime University

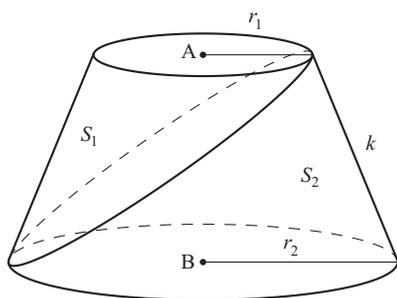


図 1: 和算書の問題

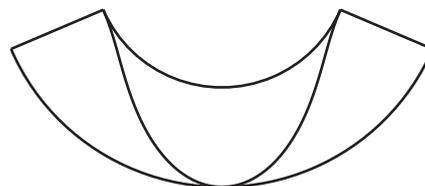


図 2: 側面の展開図

を底面とするある錐体の体積を公式「底面積×高さ÷3」を用いて計算し、次のような計算をして側面積を求めている。

(和算書の解法の概略) 円錐台の側面積は $\pi k(r_1 + r_2)$ なので、

$$S_1 + S_2 = \pi k(r_1 + r_2) \tag{1}$$

である。円錐台の高さは $h = \sqrt{k^2 - (r_2 - r_1)^2}$ なので、円錐台の体積 V は

$$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

である。また、円錐台を平面で斜めに切るときの切り口は楕円である。

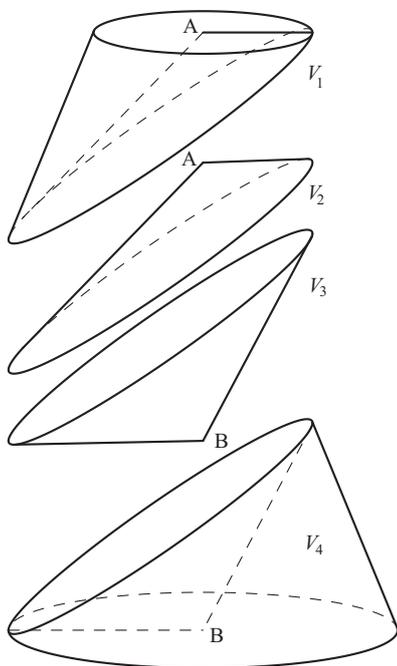


図 3: 4 個の立体に分解

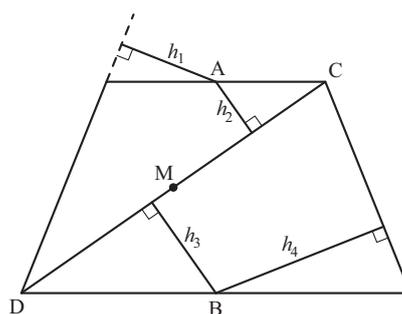


図 4: 真横から見た図

次に、円錐台を図 3 のように 4 つの部分に分解して、それぞれの体積 V_1, V_2, V_3, V_4 を考える。上から 2 つ目の図形は切り口の楕円を底面とし点 A を頂点とする楕円錐。1 つ目の図

形は円錐台を平面で切ったときの側面部分から2つ目の図形をくり抜いたもの。3つ目は切り口の楕円を底面とし点Bを頂点とする楕円錐。4つ目は円錐台を平面で切ったときの側面部分から3つ目の図形をくり抜いたもの。

図4は体積を計算するのに必要な高さで、楕円の長軸CDの長さは $\alpha = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + h^2} = \sqrt{k^2 + 4r_1r_2}$ なので、

$$h_1 = \frac{r_1}{k}h, \quad h_2 = \frac{r_1}{\alpha}h, \quad h_3 = \frac{r_2}{\alpha}h, \quad h_4 = \frac{r_2}{k}h$$

となる。また、切り口の楕円の短軸の長さ β は、図4でのCDの中点Mの位置における円錐台の厚さなので、 $\beta = 2\sqrt{r_1r_2}$ となり、楕円の面積 W は

$$W = \frac{\pi}{4}\alpha\beta$$

である。これらを用いて、

$$V_2 = \frac{1}{3}h_2W, \quad V_3 = \frac{1}{3}h_3W$$

となる。次に V_1, V_4 を求めるのであるが、和算書では次のような公式を用いている（補題2参照）。

$$V_1 = \frac{1}{3}h_1S_1, \quad V_4 = \frac{1}{3}h_4S_2 \quad (2)$$

以後は、 $V_1 + V_4 = V - V_2 - V_3$ を計算することで

$$h_1S_1 + h_4S_2 = \pi h \left\{ r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2 - \frac{(r_1 + r_2)\sqrt{r_1r_2}}{2} \right\} \quad (3)$$

が得られ、連立一次方程式(1),(3)を解くことで

$$S_1 = \frac{\pi k}{r_2 - r_1} \left\{ \frac{(r_1 + r_2)\sqrt{r_1r_2}}{2} - r_1^2 \right\}$$

$$S_2 = \frac{\pi k}{r_2 - r_1} \left\{ r_2^2 - \frac{(r_1 + r_2)\sqrt{r_1r_2}}{2} \right\}$$

を求めることができる。 □

底面が平面でない場合の錐体についても和算では(2)式のような体積公式が考えられていたことに驚かされる。それを補題としてまとめると次のようになる。

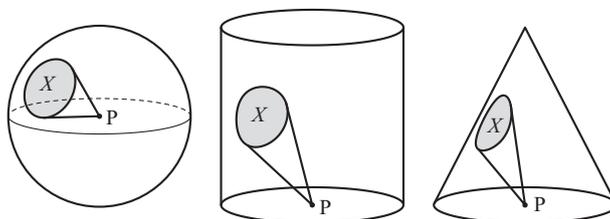


図5: 球, 円柱, 円錐

補題 2 図 5 のように球，円柱，円錐がある．点 P は球の場合は中心，円柱と円錐の場合は回転軸上の点とする．球の表面あるいは円柱・円錐の側面のある領域を X とする． X と点 P で作られる錐体を PX とし， X の面積を $S(X)$ ， PX の体積を $V(PX)$ とする．また h を，球の場合は半径，円柱と円錐の場合は点 P から側面までの距離とする．このとき，

$$V(PX) = \frac{1}{3}hS(X)$$

が成り立つ．

(証明の概略) 区積分法の考え方をを用いると，十分小さな領域 X に対しては， X は平面に等しいと仮定してよいので， $V(PX) = \frac{1}{3}hS(X)$ が成り立ち， h は一定なのでそれらを足し合わせることで補題が成り立つ． □

3 研究の目的

補題 2 の 3 つの曲面（球・円柱・円錐）以外の曲面に対しても，同様の性質を持つものはないだろうかと疑問を持ったので，調べてみることにした．

図 6 のように 3 次元空間内のなめらかな曲面 F と点 P，さらに定数 h とで作られる組を (F, P, h) と書くことにする．曲面 F 内の領域 X の面積を $S(X)$ と表し， X と点 P で作られる錐体 PX の体積を $V(PX)$ と表すことにする．このとき我々の研究目的を数学的に記述すると次のようになる．

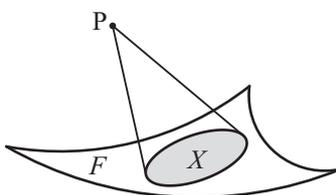


図 6: 曲面 F と錐体 PX

問題 3 曲面 F 内の任意の領域 X に対して，常に

$$V(PX) = \frac{1}{3}hS(X)$$

が成り立つような，組 (F, P, h) を求めよ．

この問題 3 を解くには，補題 2 の証明が参考になる．曲面 F 上の任意の点 x の十分小さな近傍 X に対して問題 3 の公式が成り立てばよいのだから，曲面 F の点 x における接平面を π_x とするとき，点 P と π_x の距離が常に定数 h であればよいことになる．従って，次の問題 4 を考えればよいことになる．

問題 4 曲面 F 上の任意の点 x における接平面を π_x とするとき，点 P と接平面 π_x の距離が常に定数 h であるような，組 (F, P, h) を求めよ．

点 P を中心とする半径 h の球面を $S_{P,h}$ とおけば、さらに次のように言い換えることができる。

問題 5 曲面 F 上の任意の点 x における接平面 π_x が常に球面 $S_{P,h}$ に接しているような、組 (F, P, h) を求めよ。

4 包絡面

前節の問題 5 を考えるには包絡面についての知識が必要になる。そこで最初に、岩波数学辞典第 4 版 [5] での包絡面の定義を引用する。

定義 6 助変数 t を含む曲面の族 $\{S_t\}$ に対して、この族に属さない曲面 E で、 E 上の各点で E がある S_t に接するとき (すなわち E と S_t が同一の接平面を持つとき)、 E を曲面の族 $\{S_t\}$ の包絡面という。 $\{S_t\}$ が方程式 $F(x_1, x_2, x_3, t) = 0$ で与えられているとき、 E の方程式は $F = 0$ と $\partial F / \partial t = 0$ とから t を消去して得られる。

それでは問題 5 を解くことにしよう。曲面 F 上の任意の点 x における接平面 π_x 全体のなす集合を

$$\mathcal{T}(F) = \{\pi_x \mid x \in F\}$$

としよう。また球面 $S_{P,h}$ の接平面全体のなす集合を

$$\mathcal{T}(S_{P,h}) = \{\pi_x \mid x \in S_{P,h}\}$$

とする。問題 5 は、包含関係

$$\mathcal{T}(F) \subset \mathcal{T}(S_{P,h})$$

を意味する。

このことから、集合 $\mathcal{T}(S_{P,h})$ のある部分集合 \mathcal{T} を取り出し、 \mathcal{T} の包絡面 F を作ることで、問題 5 を解くことができるのではないかというアイデアが浮かんでくる。いくつか例をあげてみよう。

(例 1) 集合 $\mathcal{T}(S_{P,h})$ 全体の包絡面 F は、元の球面 $S_{P,h}$ である。

(例 2) 球面 $S_{P,h}$ の大円を 1 つ取り、その大円上の点における接平面の集合を \mathcal{T} とし、 \mathcal{T} の包絡面 F をとれば、それは円柱である。

(例 3) 球面 $S_{P,h}$ の小円を 1 つとり、その小円上の点における接平面の集合を \mathcal{T} とし、 \mathcal{T} の包絡面 F をとれば、それは円錐である。

この 3 例は、補題 2 に登場する 3 曲面が、集合 $\mathcal{T}(S_{P,h})$ のある部分集合 \mathcal{T} の包絡面として得られることを示している。そこで、このことを一般化し次のように定義しよう。

定義 7 球面 $S_{P,h}$ 上の曲線を C とする。 C 上の点 x における $S_{P,h}$ の接平面 π_x 全体のなす集合を \mathcal{T}_C とし、 \mathcal{T}_C の包絡面を F_C とする。

この包絡面 F_C に対し次の定理が成り立つ .

定理 8 点 P と正の定数 h があり , 定義 7 により球面 $S_{P,h}$ 上の曲線 C に対し定義される包絡面を F_C とするとき , 組 (F_C, P, h) は問題 5 の解である .

(証明) 曲面 F_C 上の任意の点を x とするとき , F_C が \mathcal{T}_C の包絡面であることにより , 点 x における F_C の接平面 π_x は

$$\pi_x \in \mathcal{T}_C$$

である . 従って π_x は球面 $S_{P,h}$ に接することになり , 組 (F_C, P, h) は問題 5 の解である . \square

この定理 8 により , 曲面 F_C は球面上の曲線 C の数だけ存在することになり , 問題 3~5 の解は無数にあることになる .

また , [3] の §15 によれば , 助変数 t を含む「平面」の族 $\{S_t\}$ の包絡面は線織面でありかつ可展面であることが示されている . 従って , 曲面 F_C は常に可展面となり , F_C の展開図を作ることが可能である . 簡単のため以後は , 点 P は原点 , また $h = 1$ とし , 球面 $S_{P,h}$ は単位球面と仮定する . 単位球面のことを単に S と表すことにする . 単位球面 S 上の曲線 C を $x(s)$ と媒介変数表示する . ここで助変数 s は曲線の長さとする . また , $v(s) = x'(s)$, $a(s) = v'(s) = x''(s)$ とおく .

補題 9 次が成り立つ .

- (1) $|x(s)| = 1$
- (2) $|v(s)| = 1$
- (3) $x(s) \perp v(s)$

(証明) (1) は定義より明らか . (2) は s が長さであることにより明らか . (3) は $x(s) \cdot x(s) = 1$ を微分することにより明らかである . \square

点 $x(s)$ における単位球面 S の接平面は , 接平面上の点を p とするとき

$$x(s) \cdot p = 1 \tag{4}$$

と表すことができる . 定義 6 に従い (4) を s で偏微分したものは , 平面

$$v(s) \cdot p = 0 \tag{5}$$

である . 2 平面 (4) と (5) の交線は , 補題 9(3) と平面 (5) 上に点 $x(s)$ があることにより , 点 $x(s)$ を通り方向ベクトルが $x(s) \times v(s)$ の直線である . この直線を $g(s)$ と表し , 方向ベクトルを $n(s)$ とおく . $g(s)$ が媒介変数 s により動くことで包絡面 F_C が作られる . 従って F_C は線織面である . この直線 $g(s)$ は線織面の母線と呼ばれている . 次の補題は $n(s)$ の定義により明らかである .

補題 10 包絡面 F_C の母線 $g(s)$ は曲線 C の接線ベクトル $v(s)$ と垂直である .

さらに、この包絡面が可展面であるための条件は3つのベクトル $v(s)$, $n(s)$, $n'(s)$ が一次従属となることであるが、そのことは

$$n'(s) = (x(s) \times v(s))' = v(s) \times v(s) + x(s) \times a(s) = x(s) \times a(s)$$

により、3つのベクトル $v(s)$, $n(s)$, $n'(s)$ がすべて $x(s)$ に垂直であることから明らかである。

以下では、曲面 F_C の例をいくつかあげる。

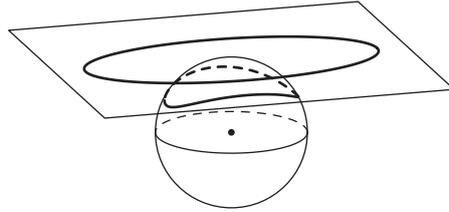


図 7: 単位球面上の楕円

(例 4) 図 7 のように、平面 $z = 1$ 上に楕円 $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$ を描き、それを原点を中心とする射影により単位球面に投影した曲線を C とする。この C から定義 7 により作られる包絡面を F_C とする。 F_C のうち xy -平面の上側にある部分だけ取り出して図示したのが図 8 である。図 8 の中で一点鎖線で表しているのが単位球面上の曲線 C である。また、細い実線は線織面としての母線である。母線は上方向にも下方向にも無限に延びているのであるが、下方向は円錐のようにただ広がるだけなので xy -平面の下側は図から省いている。また、上方向は面と面が交差するところまでを図にしている。可展面なのでその展開図を図 9 に示す。細い実線はここでも母線を表している。

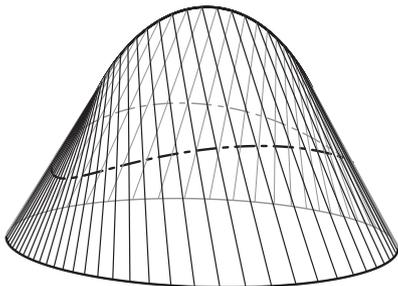


図 8: 楕円から作られる包絡面

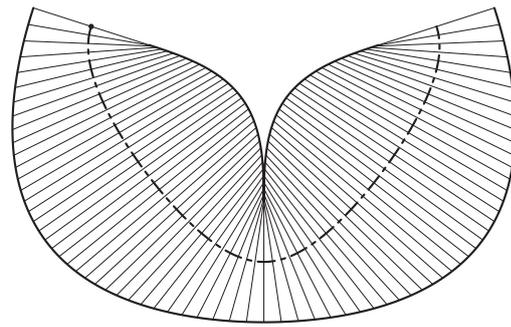


図 9: 図 8 の展開図

次の例を紹介する前に、包絡面で囲まれる空間図形についても定義しておく。

定義 11 単位球面 S 上の曲線を C とする。 C の各点 x における接平面を π_x とし、 π_x で分けられる2つの半空間のうち原点を含む方を H_x とする。このとき、空間図形 P_C を

$$P_C = \bigcap_{x \in C} H_x$$

と定義する．

空間図形 P_C は凸集合で，単位球面 S とその内部は常に P_C に含まれる．また P_C の境界（表面） ∂P_C は包絡面 F_C の部分集合である．例えば例 3 の円錐では，包絡面 F_C は図 10(1) のように頂点 A の両側に広がっている．一方 P_C と ∂P_C は図 10(2) のように単位球 S を含む片側だけとなる．

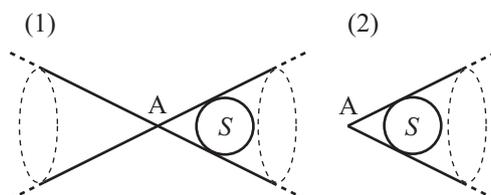


図 10: 円錐での F_C と ∂P_C

このように F_C と ∂P_C は区別しなければいけないものであるが，包絡面と P_C をセットで考えた方が扱いやすいので，以後 ∂P_C のことを単に包絡面 F_C と表記することにする．

包絡面 F_C と空間図形 P_C の様子を知るために 3D プリンター等で立体模型を作ろうとするときには，曲線 C 上に有限個の点 x_1, x_2, \dots, x_n をとり， P_C の多面体近似 $\bigcap_{i=1}^n H_{x_i}$ を使って STL 形式のデータを作り，3D プリンターで造形するとよい．

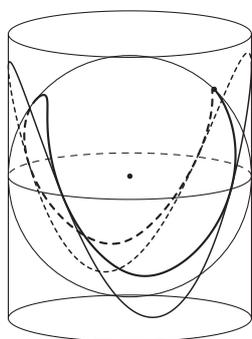


図 11: 単位球面上の正弦曲線

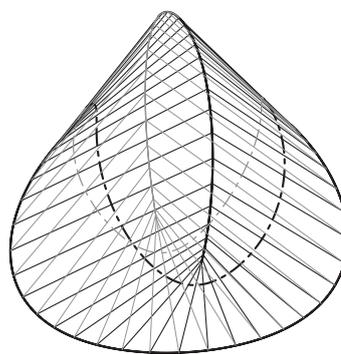


図 12: 正弦曲線から作られる包絡面

(例 5) 図 11 のように，半径 1 の円筒上に正弦曲線 $z = \sin 2\theta$ のグラフを描き，その曲線を原点を中心とする射影により単位球面に投影した曲線を C とする．この C から定義 11 により作られる空間図形 P_C を図示したのが図 12 である．細い実線は線織面としての母線である．またその展開図を図 13 に示す．

5 展開図

以下では空間図形 P_C は有界と仮定する．この節では P_C の展開図の作り方を紹介する．

最初に簡単な場合として，例 2 にあげた単位球面 S 上の小円 C を考える．図 14 は球面 S ，小円 C ，そして包絡面 F_C としての円錐を表している．ここで r は小円の半径である．包絡面

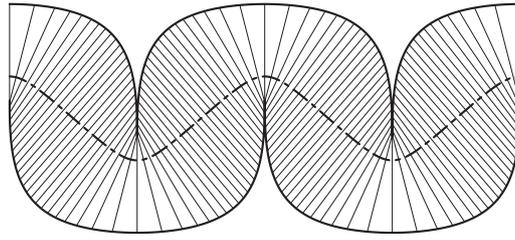


図 13: 図 12 の立体の展開図

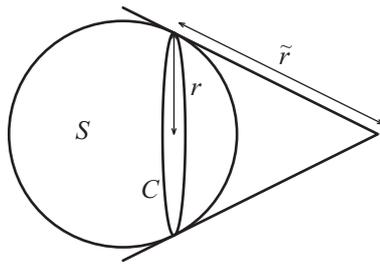


図 14: S 上の小円 C と包絡面 (円錐)

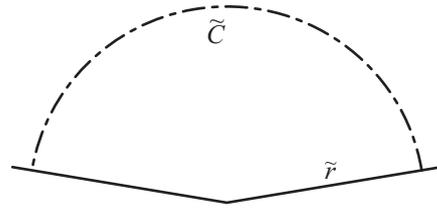


図 15: 円錐の展開図と円弧 \tilde{C}

を展開図 (図 15) に開くと, 曲線 C は展開図上では半径 \tilde{r} の円弧 \tilde{C} となる. さらに r と \tilde{r} の間には

$$\frac{1}{\tilde{r}^2} = \frac{1}{r^2} - 1 \quad (6)$$

という関係が成り立つ. 曲線 C と \tilde{C} の曲率をそれぞれ $\kappa, \tilde{\kappa}$ とすれば,

$$\tilde{\kappa}^2 = \kappa^2 - 1 \quad (7)$$

という関係式が得られる. この関係式が展開図の作成に必要となる[†].

包絡面 F_C で囲まれる立体 P_C の展開図について検討する. F_C の展開図を D_C とし, 展開図と包絡面との自然な対応写像を $p: D_C \rightarrow F_C$ とする. 単位球面 S 上の曲線 C は包絡面 F_C 上にもあるので, p による C の逆像を $\tilde{C} = p^{-1}(C) \subset D_C$ とする.

展開図を描く上での最初のステップは曲線 \tilde{C} を平面上に描くことである. 曲線 C の曲率 κ は

$$\kappa(s) = |\mathbf{a}(s)| = |\mathbf{x}''(s)| \quad (8)$$

により計算される. 曲線 \tilde{C} の曲率 $\tilde{\kappa}$ は関係式 (7) を用いると

$$\tilde{\kappa}(s) = \pm \sqrt{\kappa(s)^2 - 1} \quad (9)$$

で計算できる. \pm の符号については, 各点 $x(s)$ に対し曲線 C の曲がり方が左カーブなのか右カーブなのかを調べ適切な符号を選択すればよい. このようにして, 曲率 $\tilde{\kappa}(s)$ が決まるので, それを用いて展開図上の曲線 \tilde{C} を描くことができる[‡].

[†]空間曲線に対しては曲率 κ と捩率 τ の 2 つによって曲線が決定されるが, 単位球面 S 上の曲線 C については $\tau = \pm \frac{\kappa'}{\kappa \sqrt{\kappa^2 - 1}}$ となり捩率 τ は符号を除き曲率 κ で決まってしまう.

[‡]曲線 C が球面上では自己交差することのない曲線であっても, 展開図上で曲線 \tilde{C} が自己交差することがあるので注意.

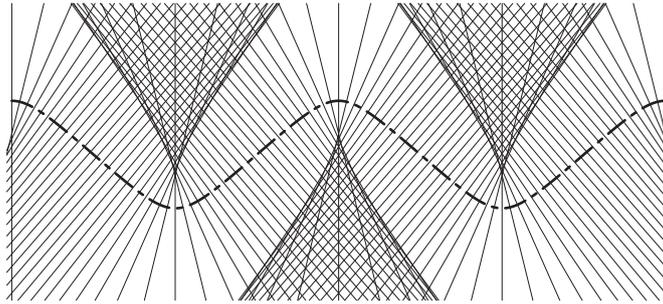


図 16: 展開図上の曲線 \tilde{C} と母線 $\tilde{g}(s)$

次に，包絡面 F_C 上の母線 $g(s)$ の逆像 $\tilde{g}(s) = p^{-1}(g(s))$ を展開図に描く．補題 10 により，母線 $g(s)$ は曲線 C と垂直なので，展開図上の母線 $\tilde{g}(s)$ も曲線 \tilde{C} に垂直となるように描けばよい．このようにして例 5 について， \tilde{C} を一点鎖線で $\tilde{g}(s)$ を細い実線で描いたのが図 16 である．

最後に母線 $g(s)$ の範囲である．線分 $\bar{g}(s) = g(s) \cap P_C$ の逆像を展開図に描くようにすればよい．定義 11 により

$$\bar{g}(s) = g(s) \cap \bigcap_{x \in C} H_x \quad (10)$$

なので，コンピュータ上の近似計算としては曲線 C 上の有限個の点を x_1, x_2, \dots, x_n として

$$\bar{g}(s) = g(s) \cap \bigcap_{i=1}^n H_{x_i} \quad (11)$$

を用いればよい．このような処理を施すことで，図 16 から図 13 を得ることができる．

6 等高重心立体

球ではないのに平らな床(平面)の上を滑らかに転がる立体として，スフェリコン (sphericon) と呼ばれる図 17 の立体が知られている [4]．円錐(底面の半径 1，高さ 1)を回転軸を通る平面で半分に割った図形を 4 個をつないで作った立体である．斜面を転がすと，ゆらゆら揺れながら転がる立体である．

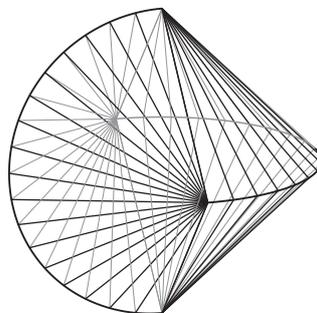


図 17: スフェリコン

この立体は転がしても常に重心の高さが一定であるという性質があり、そのような性質を持つ立体を等高重心立体と呼んでいる。等高重心立体としては、他にも hexa sphericon や two-circle roller などがこれまで知られている。

この研究で得られた包絡面 F_C で囲まれる立体 P_C の中に、等高重心立体となるものが存在する。具体的には、定理 12 と定理 14 に示すように単位球面 S 上の閉曲線 C がある種の対称性をもてば、それから導かれる立体 P_C は等高重心立体となる。その結果、等高重心立体も無数に存在することが明らかになった。

定理 12 単位球面 S 上の閉曲線 C が、原点 O に関して点対称であれば、 P_C は等高重心立体である。

(証明) 立体 P_C を囲む包絡面 F_C 上の点 p が真下にきて床(平面)と接しているとする。点 p における F_C の接平面は、包絡面の定義により曲線 C 上のある点 x における単位球 S の接平面 π_x と一致する。その接平面 π_x が床面と一致していることになる。この床面から単位球の中心 O までの距離は常に 1 (一定) である。

あとは立体 P_C の重心 G が原点 O であることを示せばよい。原点 O に関する点対称移動を $\alpha : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$ とするとき、仮定により $\alpha|_C : C \rightarrow C$ は全単射である。立体 P_C の α による像は

$$\alpha(P_C) = \bigcap_{x \in C} \alpha(H_x) = \bigcap_{x \in C} H_{\alpha(x)} = \bigcap_{x \in C} H_x = P_C$$

となるので、重心 G に対しても $\alpha(G) = G$ である。写像 α の不動点は原点のみであり、従って P_C の重心は原点 O である。□

定理 12 の仮定を満たす曲線の例としては、単位球面上の北極と南極をつなぐパスを C_1, C_1 を原点に関して点対称移動したものを C_2 とし、 C_1 と C_2 をつないだ閉曲線 C があげられる。

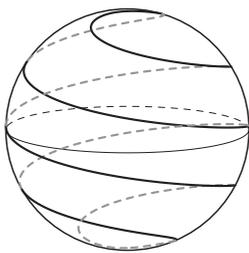


図 18: 例 6 の曲線 C

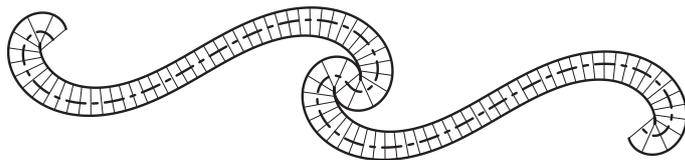


図 19: 例 6 の包絡面の展開図

(例 6) 図 18 は定理 12 の仮定を満たす曲線 C の例である。北極と南極をつなぐ螺旋 2 本を原点に関して点対称になりかつ滑らかに接続されるように描いている。その包絡面の展開図が図 19 である。

次の定理を述べる準備として空間の変換を 2 つ定義する。

定義 13 空間の変換 τ と σ_n を次のように定める。

(i) 変換 τ を, xy -平面に関する面对称移動

$$\tau : (x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$$

とする.

(ii) 自然数 $n \geq 2$ に対して変換 σ_n を, z 軸を回転軸とする $\theta = 2\pi/n$ の回転

$$\sigma_n : (x, y, z) \mapsto (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z)$$

とする.

この記号を用いて定理は次のように述べられる.

定理 14 単位球面 S 上の閉曲線 C が合成変換 $\sigma_n \circ \tau$ で C 自身に移るならば, P_C は等高重心立体である. ただし, n は 2 以上の自然数とする.

(証明) 定理 12 の証明と同様に, 立体 P_C の重心が原点であることを示せば良い. P_C の重心を $G(x, y, z)$ とするとき, 仮定により $\sigma_n \circ \tau(G)$ も重心である. 従って,

$$(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, -z) = (x, y, z)$$

が成り立ち, これを解くと $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ となるので, 重心 G は原点である. □

前節で取り上げた例 5 がこの定理 14 の仮定を満たしている. より一般には球面上の曲線 C を $y = \sin n\theta$ ($n \geq 2$) で定めるときの立体 P_C は, 定理 14 により等高重心立体である.

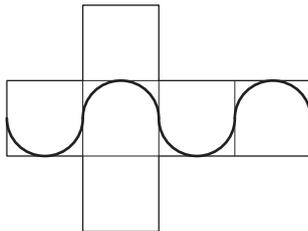


図 20: 立方体の展開図

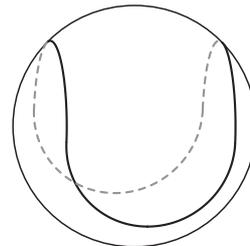


図 21: スフェリコンを生成する曲線 C

(例 7) 図 20 のように立方体の展開図に 4 個の半円を描き, この立方体上の曲線を中心から単位球に投影した図 21 のような曲線 C から立体 P_C を作るとそれが図 17 のスフェリコンである.

(例 8) 図 22 のように正八面体の展開図に 6 個の円弧を描き, この正八面体上の曲線を中心から単位球に投影した図 23 のような曲線 C から得られる立体 P_C の展開図が図 24 である.

(例 9) 図 25 は立方体の展開図の 6 枚の正方形それぞれに, ヒルベルト曲線を円弧と線分をつなぎ合わせ尖った角ができないようにして描き, さらに正方形 6 枚をつなぐとき曲線が 1 本

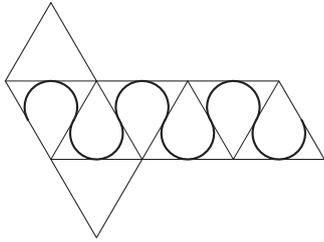


図 22: 正八面体の展開図

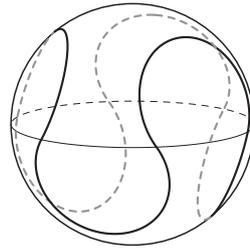


図 23: 例 8 の曲線 C

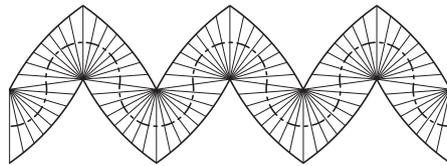


図 24: 例 8 の立体 P_C の展開図

につながるように描いたものである．この立方体上の曲線を中心から単位球に投影して曲線 C を描いたのが図 26 である．この曲線 C は定理 12 の仮定を満たすので，それから作られる立体 P_C は等高重心立体である．その展開図を図 27 から図 30 に示している．どれも合同な 6 個の部分からなるため図 28 以後は展開図の 6 分の 1のみ描いている．

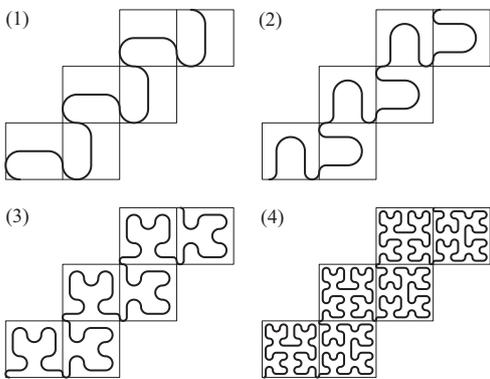


図 25: ヒルベルト曲線

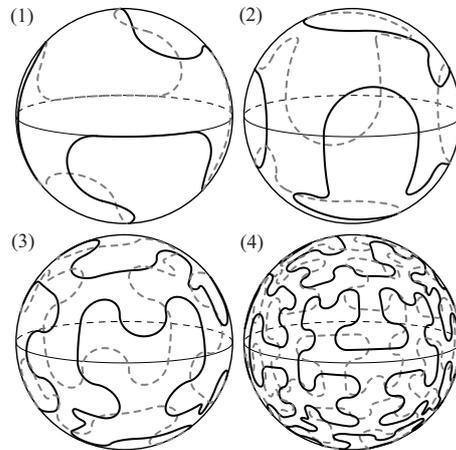


図 26: ヒルベルト曲線から得られる曲線 C

7 まとめ

錐体の体積公式が成り立つような曲面について考察した．その結果，単位球面上の曲線 C から作られる包絡面 F_C が，その性質を満たすことが証明できた．また，そのような曲面 F_C は無数に存在することが明らかになった．

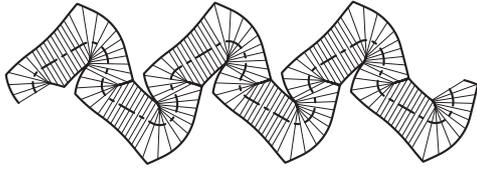


図 27: ヒルベルト曲線 (1) の展開図

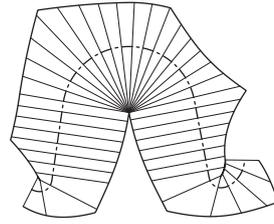


図 28: ヒルベルト曲線 (2) の展開図の 1/6

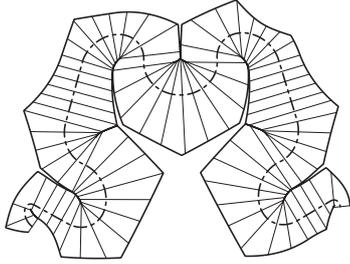


図 29: ヒルベルト曲線 (3) の展開図の 1/6

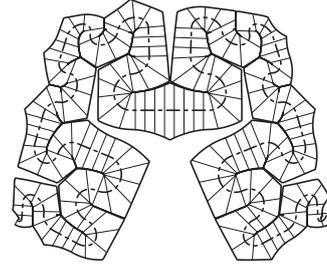


図 30: ヒルベルト曲線 (4) の展開図の 1/6

つづいて、その応用として、等高重心立体について考察した。その結果、単位球面上の閉曲線 C がある種の対称性を持てば、それから作られる包絡面 F_C で囲まれる立体 P_C が等高重心立体となることが証明できた。等高重心立体も無数に存在することが明らかになった。

本研究は JSPS KAKENHI Grant Number JP17K00978 の研究助成を受けて行った研究成果である。

参考文献

- [1] 藤田定資、『精要算法』, 1781
- [2] 藤原政饒、『精要算法解』, 1834
- [3] 大槻富之助、『微分幾何学』, 朝倉書店, 1961
- [4] 村松俊夫、『等高重心立体の構造を用いた動く造形 — ステンレスパイプによる「A study of tangible」シリーズ —』, 図学研究 第 40 巻 4 号, 11–16, 2006
- [5] 日本数学会編集、『岩波 数学辞典 第 4 版』, 岩波書店, 2007