

# 多面体と展開図における半分長定理について

平田浩一 \*

## On the Half-Lengths Theorem for Folding Polygons to Polyhedra

Koichi HIRATA \*

**Abstract:** In this paper we prove the half-lengths theorem for folding polygons to polyhedra and state its applications to edge-to-edge gluings.

**Keywords:** half-lengths theorem, polyhedron, folding polygon, Alexandrov gluing, rolling belt.

### 1 はじめに

凸多面体から展開図を作る問題の逆として、平面多角形から凸多面体を作る問題がある。2005年長野大会の発表「幾何教材としての多面体と展開図」[3]では、次の図 1(a) や図 1(b) からどのような凸多面体ができるだろうかと問いを出した。そして、図 1(a) からは図 2(a)~(c) の展開図のように折ることで、四面体、五面体、八面体など多数の凸多面体を作ることができることを紹介した。図 1(b) から同様に多数の凸多面体を作ることができる。

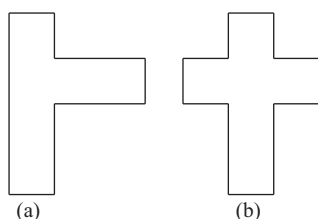


図 1: 平面多角形

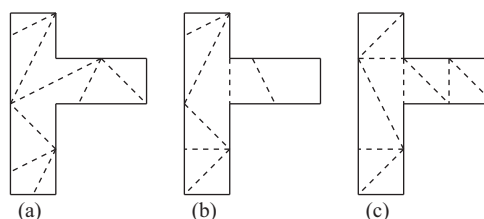


図 2: 展開図

この問題を解くにあたっては、どのように折るかではなく、どの辺とどの辺を接着（貼り合わせ）するかを、一定の条件のもとで、コンピュータを用いてシラミ潰しに探索する必要がある [1], [4], [5]。そのアルゴリズムとしては、容易に実装できるが一部分の接着しか探せない辺接着アルゴリズムと、すべての接着を探し出す一般接着アルゴリズムがある [4], [5]。また、接着データが 1 つ見つければ、展開図が必ず 1 つ作られることが知られている。

展開図の数において、上の図 1(a) と図 1(b) には大きな違いがある。図 1(a) からは展開図が無数に作られるのに対し、図 1(b) からは 85 個の展開図しか作られない。何故だろうか。文献 [4] によれば、展開図が無数にあるのか有限なのかには、「回転ベルト」の存在が関わっている。

\*愛媛大学教育学部 Faculty of Education, Ehime University

回転ベルトは接着の可能性を調べる過程で出てくる特殊な構成部品である。回転ベルトが一度見つければ、「周の二等分接着」により無限通りの接着が実現できる。

発表のタイトルにある半分長定理 ([4] 25.3.3) についてであるが、その内容は大雑把にいつてしまえば「ある条件のもとでは、回転ベルトを持たない多角形に対しては、辺辺接着アルゴリズムだけで、すべての接着を求めることができる」ということである。すなわち、ある条件下では、辺辺接着アルゴリズムさえあれば十分であるということである。しかし、その定理の仮定にある回転ベルトを持たないことはどのように検証するのだろうか。実は、辺辺接着アルゴリズムを用いることでその回転ベルトの有無も判定することができるのである。半分長定理の証明は [4] には載っていない。この論文ではその証明と応用について述べることにする。

多角形から様々な凸多面体を作る問題は、子どもの自由研究などにも使われることがあり、メールでの問い合わせもある。そのため辺辺接着アルゴリズムでどこまで判定できるのかについて、この小論にまとめておきたいと思っている。

## 2 辺辺接着アルゴリズム

図 2(a)~(c) の展開図を見つけるために論文 [1] では、最初に図形を頂点と辺に分割し、図 3 のように各頂点に  $v_1, v_2, \dots, v_{14}$ 、各辺に  $e_1, e_2, \dots, e_{14}$  と番号をつけて、「どの辺とどの辺を接着 (貼り合わせ) するか」という方法をとった。

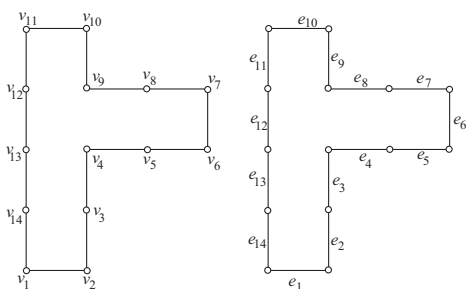


図 3: 辺辺接着

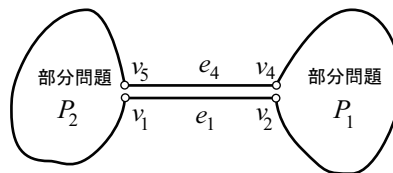


図 4:  $e_1$  と  $e_4$  の接着

辺  $e_i$  と辺  $e_j$  の接着を  $(e_i, e_j)$  と表すことにする。図 2(a) の展開図が得られる接着は  $\{(e_1, e_4), (e_2, e_3), (e_5, e_{10}), (e_6, e_9), (e_7, e_8), (e_{11}, e_{14}), (e_{12}, e_{13})\}$  と表すことができる。[1] ではコンピュータを使って、このような辺辺接着を探索している。

作りたいのは凸多面体なので、接着を求めるときには次の 3 つの条件を満たす必要がある。

- (C<sub>1</sub>) 同じ長さの辺と辺のみ接着可能
- (C<sub>2</sub>) 1 つの頂点に集まる角の和は  $360^\circ$  以下
- (C<sub>3</sub>) 接着してできあがる立体は球面と同相

辺辺接着を求めるアルゴリズムについて図 3 を例として簡単に触れておこう。図 3 の多角形に対し、頂点と辺からなる数珠状のデータ  $\{v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{14}, e_{14}\}$  を用意する。そして、各頂点  $v_i$  にはその点における内角の大きさを持たせ、各辺  $e_i$  には辺の長さを持たせる。

以下のアルゴリズムの記述では、簡潔な記述にするために、少なくとも 1 個の辺辺接着が存在するかどうかを決定するアルゴリズムとして説明する。それをすべての接着を列挙するアルゴリズムに修正することはそう難しいことではない。

ここから辺辺接着アルゴリズムについて説明する。アルゴリズムへの入力データは  $\{v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{14}, e_{14}\}$  である。最初に辺を1つ選択する(ここでは  $e_1$  とする)。選択した辺  $e_1$  と接着する相手を探す。接着する相手としては  $e_2, e_4, e_6, \dots, e_{14}$  の7通りの可能性がある。ここでは  $e_1$  と  $e_4$  の接着の可能性を調べてみる(図4)。そのとき、次の3つのことをチェックする必要がある。

- (1) 条件  $C_1$  により  $e_1$  と  $e_4$  の長さが等しい
- (2) 条件  $C_2$  により  $v_1$  と  $v_5$  の角度の和が  $360^\circ$  以下
- (3) 条件  $C_2$  により  $v_2$  と  $v_4$  の角度の和が  $360^\circ$  以下

どれか1つでも満たされていないものがあれば、 $e_1$  と  $e_4$  は接着は不可であり、他の接着相手を探す。 $e_2$  から  $e_{14}$  までのすべてで接着が不可であれば、この問題に対して接着は存在しないことになる。

3つの条件すべてが満たされていれば、次に部分問題  $P_1$  と  $P_2$  を検討する。まず、頂点  $v_2$  と  $v_4$  が重なってできる新しい頂点を  $v'_2$  とし、それが持つ角度は  $v_2$  と  $v_4$  が持つ角度の和とする。部分問題  $P_1$  は2頂点と2辺からなるデータ  $\{v'_2, e_2, v_3, e_3\}$  で、これに対して同じアルゴリズムを再帰的に適用する。

次に、頂点  $v_5$  と  $v_1$  が重なってできる新しい頂点を  $v'_5$  とし、それが持つ角度は  $v_5$  と  $v_1$  が持つ角度の和とする。部分問題  $P_2$  は10頂点と10辺からなるデータ  $\{v'_5, e_5, v_6, e_6, \dots, v_{14}, e_{14}\}$  で、これに対しても同じアルゴリズムを再帰的に適用する。

部分問題  $P_1$  と  $P_2$  ともに解決でき接着が見つければ、これでこの問題に対して少なくとも1つの接着が見つかったことになる。逆に部分問題  $P_1$  と  $P_2$  少なくとも一方で接着が見つからなかったときは、 $e_1$  と  $e_4$  の接着は不可となる。

このように、アルゴリズムを再帰的に部分問題に適用することで、辺辺接着が存在するかどうか判定できる。詳細は [1], [4], [5], [6] を参考されたい。

図3の多角形に辺辺接着アルゴリズムを適用するとき、多角形の周囲を辺に分ける段階で、図5(a)のように長さの異なる2種類の辺に分けることも可能だが、条件  $C_1$  により接着の可能性を狭めることになるので辺の選び方として好ましくない。また、図5(b)のようにより細かく分けることにすると、接着の組合せが増える可能性がある。実際、図3に辺辺接着アルゴリズムを適用すると17通りの接着が見つかるのに対し、図5(b)に辺辺接着アルゴリズムを適用すると接着は59通りに増える。

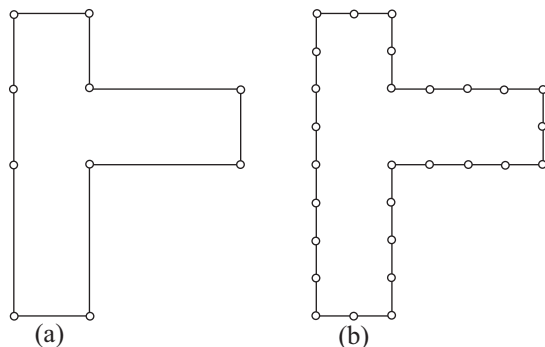


図 5: 辺の選択

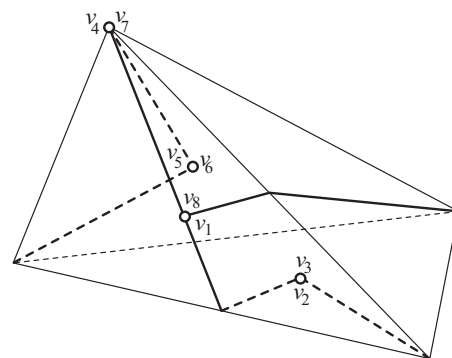


図 6: 四面体  $\mathcal{P}$

### 3 接着木

この節では一般的な接着について定義し、半分長定理を証明する準備を行う。

多角形  $P$  の境界  $\partial P$  をある接着  $G$  で接着し、図形  $\mathcal{P}$  が得られるとする。このとき、接着  $G$  は境界  $\partial P$  の同値関係であり、この接着で多角形  $P$  から図形  $\mathcal{P}$  が作られるさまは、全射  $\pi : P \rightarrow \mathcal{P}$  により表すことができる。

**定義 1** 多角形  $P$  の境界  $\partial P$  の接着  $G$  が以下の性質 (1) ~ (3) を満たすとき アレクサンドロフ接着という。

- (1) 接着  $G$  は、境界  $\partial P$  を有限個の線分に分割して、どの線分にもただ 1 つの同じ長さの線分が貼り合わさるようにして作られている。
- (2) 接着の結果として得られる図形  $\mathcal{P}$  のどの点においてもその点の周りの角の和は  $360^\circ$  以下である。
- (3) 図形  $\mathcal{P}$  は球と位相同型である。

アレクサンドロフ接着に対して、次の定理が成り立つ ([4] 23.3)。

**定理 2 (アレクサンドロフの定理)** 多角形  $P$  の境界  $\partial P$  の接着  $G$  がアレクサンドロフ接着であれば、その接着で凸多面体  $\mathcal{P}$  が一意的に決まる。ただし、2重被覆凸多角形 (凸二面体) も凸多面体と考える。

第 2 節で述べた辺辺接着アルゴリズムで得られる接着はアレクサンドロフ接着であることは明らかである。今後は、単に接着というときはアレクサンドロフ接着を指すものとする。

**定義 3** 接着木とそれに関連する用語を以下のように定義する。

- (1) 接着  $G$  による同値関係で  $\partial P$  から得られる商集合  $T_G$  を 接着木 という。すなわち、接着による全射を  $\pi : P \rightarrow \mathcal{P}$  とするとき、 $T_G = \pi(\partial P)$  である。
- (2) 点  $v \in T_G$  は  $\pi^{-1}(v)$  が 1 点からなるとき 葉 とよぶ。
- (3) 点  $v \in T_G$  は  $\pi^{-1}(v)$  が  $d(\geq 3)$  個の点からなるとき、次数  $d$  の 分岐点 とよぶ。
- (4) 点  $v \in T_G$  は  $\pi^{-1}(v)$  に  $P$  の頂点が含まれるとき 頂点 とよぶ。
- (5) 点  $v \in T_G$  が葉、分岐点、または頂点のとき 節点 とよぶ。
- (6) 頂点ではない葉を 折り点 とよぶ。

接着木  $T_G$  は、アレクサンドロフ接着の条件 (3) により、連結で閉路を持たない無向グラフとしての「木」となる。

図 6 は図 7 の接着により作られる凸多面体である。図 7(a) の多角形  $P$  に対する接着木  $T_G$  が図 7 の (b) と (c) である。ただし (b) の図は接着する部分を少し離して図に表しているので  $\partial P$  の様子も分かる図である。(c) は接着木  $T_G$  そのものである。この接着木の 3 つの葉はすべて折り点である。また、この接着木により得られる多面体の展開図は図 2(a) である。

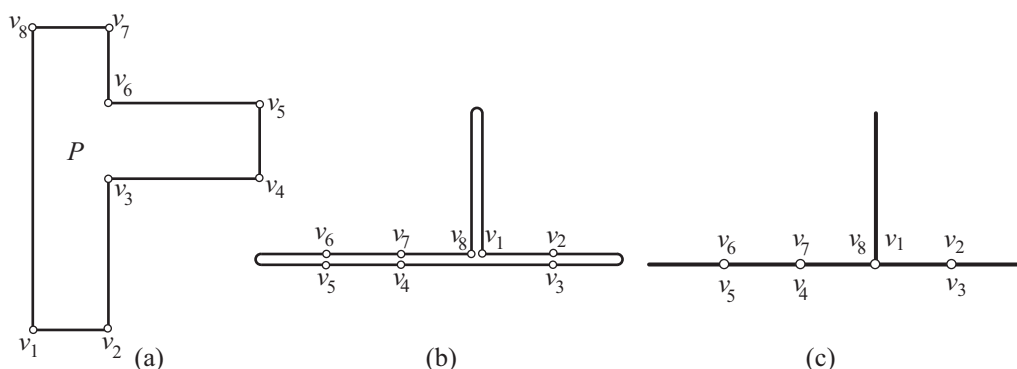


図 7: 接着木の例

接着木  $T_G$  上の点を  $v$  とするとき、 $v$  の周りの角の和とは、 $\pi^{-1}(v)$  に含まれる  $\partial P$  の点を持つ角の総和である。

多角形  $P$  から接着  $G$  により凸多面体  $\mathcal{P}$  が作られているとする。このとき、接着木  $T_G$  は凸多面体  $\mathcal{P}$  の部分集合なので、 $\mathcal{P}$  をその接着木  $T_G$  で切り開くことにより展開図としての多角形  $P$  が得られると見ることもできる。

補題 4 多角形  $P$  の接着木  $T_G$  は次の性質を持つ。

- (1) 葉は頂点か折り点である。
- (2) 分岐点  $v \in T_G$  に対して、 $\pi^{-1}(v)$  に含まれる頂点ではない点は高々1個である。
- (3) 分岐点  $v \in T_G$  に対して、 $\pi^{-1}(v)$  に含まれる頂点ではない点を  $\bar{v}$  とし、 $\bar{v}$  を含む  $\partial P$  の辺を  $e$  とする。このとき、 $v$  を通る  $T_G$  のパスの中で、点  $v$  の周りの角をパスによって2つに分けるときのその両側の角が共に  $180^\circ$  以下となるものは、 $\pi(e)$  のみである。
- (4) 葉で、その周りの角の和が  $180^\circ$  以下となるものは、高々4個である。

(証明)

- (1) 定義より明らか。
- (2)  $v$  は分岐点なので、 $\pi^{-1}(v)$  には3個以上の点が含まれる。その中に頂点ではない点が2点含まれると、 $v$  の周りの角は  $360^\circ$  を超えてしまいアレクサンドロフ接着の条件に反する。従って、頂点ではない点は高々1個である。
- (3) 点  $\bar{v}$  はそれ1つで  $180^\circ$  を角として持っている。従って、 $v$  を通る  $T_G$  のパスの中で、その両側の角を共に  $180^\circ$  以下とするのは、 $\bar{v}$  とそれ以外の点を分けるパス  $\pi(e)$  のみである。
- (4) 葉  $v$  の周りの角の和が  $180^\circ$  以下であれば、凸多面体  $\mathcal{P}$  における頂点  $v$  での曲率は  $180^\circ$  以上となる。凸多面体の頂点の曲率の総和は  $720^\circ$  なので、そのような葉は高々4個である。(証了)

定義 5 接着木  $T_G$  のパス  $s$  で、その端点が葉または分岐点で途中に分岐点を含まないものを、分岐辺とよぶことにする。接着木は有限個の分岐辺を分岐点で接続したものである。

図 7 の接着木は3本の分岐辺からなっている。次節の図 9 は1本、図 10 は5本の分岐辺からなっている。

## 4 周の二等分接着と回転ベルト

多角形  $P$  が図 8 のように凸多角形の場合は、周の二等分接着で無限個の凸多面体を作ることができる [2], [4].

図 8 のように凸多角形の周上の任意の点を  $x$  とし、 $x$  から周をまわり  $x$  に戻るまでの一周の長さをちょうど二等分する点を  $y$  とする。凸多角形の周を  $x$  と  $y$  で折り返すようにして周をつぶし、図 9 のようにして上半分と下半分を周にそって接着する。この接着は  $P$  のすべての頂点の角が  $180^\circ$  以下であるためにアレキサンドロフ接着であり、この接着で凸多面体を得ることができる。このような接着を周の二等分接着とよぶ。

点  $x$  は周上のどこにあってもよいので、点  $x$  を周に沿って連続的に動かすことで、図 9 はベルトのように連続的に回転し、それら接着から連続的に無限個の凸多面体が得られることになる。このような周の二等分接着により得られる連続的に動く接着部分を「回転ベルト」とよぶ。

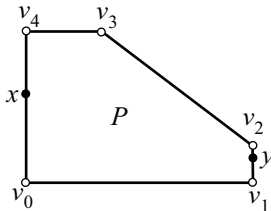


図 8: 周の二等分点

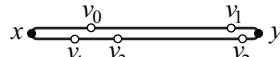


図 9: 周の二等分接着

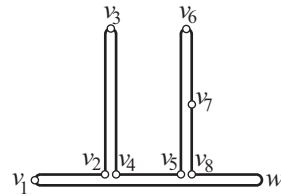


図 10: 回転ベルトを持つ接着木

次は接着木の観点からの回転ベルトの定義である。

**定義 6** 多角形  $P$  の接着木  $T_G$  の葉と葉をつなぐパス  $p$  が次の (1), (2) を満たすとき、 $p$  を回転ベルトパスとよぶ。

- (1) パス  $p$  の端点 (葉)  $v$  の周りの角の和は  $180^\circ$  以下である。
- (2) パス  $p$  の端点ではない節点  $v$  において、 $p$  で分けられる  $v$  の周りの角はどちら側も  $180^\circ$  以下である。

さらに、回転ベルトパス  $p$  を囲む  $\partial P$  の部分集合  $\tilde{p} = \pi^{-1}(p)$  を回転ベルトとよぶ。また、多角形  $P$  に対し、回転ベルトパス  $p$  を持つ接着木  $T_G$  が少なくとも 1 つ存在するとき、多角形  $P$  は回転ベルトを持つという。そうでないとき、多角形  $P$  は回転ベルトを持たないという。

この定義に関しては少し補足説明する。パス  $p$  の端点  $v$  は葉なので、 $v$  は折り点または頂点である。端点  $v$  が折り点のときはその周りの角はちょうど  $180^\circ$  であり定義の (1) を満たす。端点  $v$  が頂点であるときはその周りの角は  $180^\circ$  より大きくなる可能性もあるが、定義の (1) により  $p$  が回転ベルトパスであるためには  $180^\circ$  以下でなければならない。パス  $p$  の端点ではない節点  $v$  については、 $v$  の周りの角はパス  $p$  によって 2 つの側に分けられるが、定義の (2) により  $p$  が回転ベルトとなるためにはそのどちら側の角の和も  $180^\circ$  以下でなければならない。

図 10 は回転ベルトパスを含む図 7(a) の多角形  $P$  の接着木である。 $v_1$  と  $w$  をつなぐパス  $p$  がこの接着木での回転ベルトパスであることを確認しよう。パス  $p$  の端点である頂点  $v_1$  の周りの角は  $90^\circ$  であり、 $w$  は折り点であるので定義の (1) を満たす。また、 $v_2, v_4$  ともう 1 点が重なってできる次数 3 の分岐点での  $p$  の両側の角は共に  $180^\circ$  である。 $v_5$  と  $v_8$  が重なる次数 3 の

分岐点のところでも同様であり、定義の (2) を満たす。従って  $p$  は回転ベルトパスである。回転ベルトパス  $p$  を囲む  $\partial P$  の部分集合  $\tilde{p} = \pi^{-1}(p)$  は 3 つの線分  $v_1v_2, v_4v_5, v_8v_1$  の和集合であり、辺  $v_1v_2$  の長さの 6 倍の長さを持つ回転ベルトである。

この回転ベルト部分に対し、図 10 の接着に替えて、任意の周の二等分接着に置き替えることで、図 7(a) の多角形に対して新たな接着  $G'$  を生成することができる。このように、回転ベルトパスが一つ見つければ、その回転ベルトに対して周の二等分接着を適用することで、無限個の接着が生成されることになる。

## 5 半分長定理

この節では、多角形  $P$  のすべての辺の長さはある単位長  $l$  の整数倍であると仮定する。すなわち、どの 2 辺の長さの比も無理数にはならないと仮定する。

定理 7 (半分長定理) 多角形  $P$  は、すべての辺の長さがある単位長  $l$  の整数倍であり、回転ベルトを持たないと仮定する。このとき、 $P$  の辺すべてを長さ  $\frac{l}{2}$  の線分に細分した細分化多角形  $P'$  を作り、 $P'$  に辺辺接着アルゴリズムを適用することで、多角形  $P$  のすべての接着を得ることができる。

この定理を証明するには、もう少し準備が必要である。

定義 8 多角形  $P$  のすべての辺の長さはある単位長  $l$  の整数倍とする。

- (1)  $P$  の辺上に頂点から順に長さ  $l$  の間隔で点を取り、 $r$ -点とよぶ。頂点も  $r$ -点とする。
- (2) 隣り合う 2 つの  $r$ -点の中点を  $r'$ -点とよぶ。

図 11 は、図 7(a) の辺  $v_1v_2$  の長さを単位長  $l$  とするときの  $r$ -点 (白) と  $r'$ -点 (黒) を図にしたものである。多角形  $P$  の周囲  $\partial P$  の長さが  $l$  の  $n$  倍のとき、 $r$ -点は  $\partial P$  上に等間隔に  $n$  個並んでいる。 $r'$ -点も同様に等間隔に  $n$  個並んでいる。また、半分長定理の中に出てくる細分化多角形  $P'$  の頂点は  $r$ -点と  $r'$ -点からなる  $2n$  個の点である。

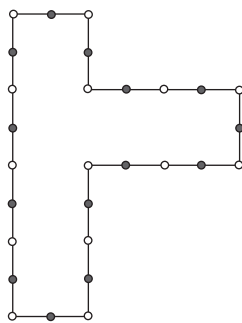


図 11:  $r$ -点と  $r'$ -点

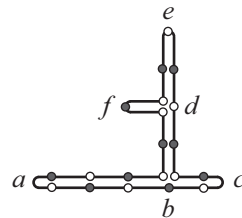


図 12:  $r$ -接着と非  $r$ -接着

定義 9 多角形  $P$  のすべての辺の長さはある単位長  $l$  の整数倍とし、その接着木  $T_G$  の分岐辺  $s$  が次の (1), (2) の条件を満たすとき、その分岐辺  $s$  は  $r$ -接着 という。そうでないとき 非  $r$ -接着 という。



- (1)  $s$  の端点  $v$  が葉であるとき、 $\pi^{-1}(v)$  は  $r$ -点または  $r'$ -点である。 $s$  の端点  $v$  が分岐点であるとき、 $\pi^{-1}(s)$  と接続している  $\pi^{-1}(v)$  内の 2 点は共に  $r$ -点である。
- (2)  $s$  の端点ではないところでは、 $r$ -点には  $r$ -点が接着し、 $r'$ -点には  $r'$ -点が接着している。

図 12 の接着木の分岐辺 5 個のうち、 $bd, de, df$  の 3 個は  $r$ -接着で、 $ab, bc$  の 2 個は非  $r$ -接着である。 $r$ -接着に関して次の補題が成り立つ。

**補題 10** 多角形  $P$  のすべての辺の長さはある単位長  $l$  の整数倍とする。 $P$  の接着木  $T_G$  に関して次が成り立つ。

- (1)  $T_G$  の分岐辺  $s$  の 1 つの端点  $v$  で定義 9(1) が成り立てば、 $s$  は  $r$ -接着である。
- (2)  $T_G$  の分岐辺  $s$  上の端点でない点  $v$  において、 $r$ -点と  $r$ -点が接着していれば、 $s$  は  $r$ -接着である。
- (3)  $T_G$  の次数  $d$  の分岐点を  $v$  とする。 $v$  を端点とする  $d$  個の分岐辺のなかで、非  $r$ -接着なものは 0 個または 2 個である。
- (4)  $T_G$  の葉と葉をつなぐパス  $p$  に含まれるすべての分岐辺が非  $r$ -接着であれば、 $p$  は回転ベルトパスである。
- (5)  $T_G$  が非  $r$ -接着な分岐辺  $s$  を持つとする。このとき  $s$  を含む回転ベルトパス  $p$  で、 $p$  のすべての分岐辺が非  $r$ -接着であるものが存在する。

(証明)

(1) 分岐辺  $s$  の両端点を  $v, v'$  とする。 $v$  が定義 9(1) を満たしているとする。 $s$  の途中には分岐点はないので、 $s$  から両端点を除いた部分を  $\bar{s}$  とすると、 $\pi^{-1}(\bar{s})$  は  $\partial P$  の 2 本のパス  $p_1, p_2$  で、その  $v$  側の端点は共に  $r$ -点か共に  $r'$ -点であり、 $\frac{l}{2}$  間隔に  $r$ -点と  $r'$ -点交互に並んでいるので、 $s$  は定義 9(2) を満たしている。分岐辺  $s$  のもう一方の端点  $v'$  については、(i)  $v'$  が分岐点であれば、補題 4(2) により、2 本のパス  $p_1, p_2$  のどちらか一方の  $v'$  側の端点は頂点 ( $r$ -点) である。従って他方の  $v'$  側の端点も  $r$ -点である。(ii)  $v'$  が葉であれば  $p_1, p_2$  は連続した 1 本のパス  $p$  でその両端点が共に  $r$ -点か共に  $r'$ -点であることより、 $p$  の長さは  $l$  の整数倍である。従って  $p$  の中点が葉  $v'$  なのでそこは  $r$ -点か  $r'$ -点である。以上により  $s$  は  $r$ -接着である。

(2) (1) と同様に  $\pi^{-1}(\bar{s})$  は  $\partial P$  の 2 本のパスでその途中で  $r$ -点と  $r$ -点が接着していることにより、定義 9(2) を満たしている。また  $s$  の両端点が定義 9(1) を満たしていることも (1) と同様に証明できる。

(3) 補題 4(2) により、 $\pi^{-1}(v)$  の  $d$  個の点のうち頂点でないものの個数は高々 1 個である。従って、 $\pi^{-1}(v)$  の点のうち  $r$ -点でないものの個数  $k$  は  $k \leq 1$  である。 $k = 0$  のときは  $\pi^{-1}(v)$  がすべて  $r$ -点なので、(1) により  $v$  を端点とするすべての分岐辺は  $r$ -接着である。 $k = 1$  のときは、 $\pi^{-1}(v)$  の中の  $r$ -点でない点を  $\bar{v}$  とする。 $v$  を端点とする分岐辺  $s$  のなかで  $\bar{v} \in \pi^{-1}(s)$  となるものはちょうど 2 つある。この 2 つの分岐辺は定義 9(1) を満たさないため非  $r$ -接着である。残る  $d - 2$  個の分岐辺は  $r$ -接着である。

(4) パス  $p$  が回転ベルトパスであることを定義 6 により確認する。 $p$  の葉については、非  $r$ -接着であることにより、常に折り点となるのでその周りの角は  $180^\circ$  である。 $p$  の分岐点  $v$  については、 $v$  と接続する  $p$  の 2 つの分岐辺が非  $r$ -接着なので、補題 4(3) により  $v$  での  $p$  の両側



は  $180^\circ$  以下である。 $p$  の葉でも分岐点でもない頂点については、頂点と頂点以外の点が接着しているため、両側共  $180^\circ$  以下である。従って  $p$  は回転ベルトパスである。

(5) 分岐辺  $s$  の両端が葉であれば、(4) により  $s$  は回転ベルトパスである。 $s$  の端点  $v$  が分岐点であるとすれば、(3) により  $v$  を端点とするもう 1 つの非  $r$ -接着な分岐辺  $e'$  が存在する。この 2 つの分岐辺を点  $v$  でつなぐことにより 1 つのパスが構成される。このパスについても、1 つの端点分岐点であればその先にも非  $r$ -接着な分岐辺が存在することになるので、パスが延長される。分岐辺の数は有限なので、これを繰り返すことで最終的には、葉と葉をつなぐパス  $p$  となり、それを構成するすべての分岐辺が非  $r$ -接着なので、(4) により  $p$  は  $s$  を含む回転ベルトパスである。(証了)

**補題 11** 多角形  $P$  は、すべての辺の長さがある単位長  $l$  の整数倍であり、回転ベルトを持たないと仮定する。 $P$  の接着木  $T_G$  の分岐辺はすべて  $r$ -接着である。

(証明) 背理法により、接着木  $T_G$  に非  $r$ -接着な分岐辺  $s$  が存在すると仮定する。補題 10(5) により  $s$  を含む回転ベルトパス  $p$  が存在することになり矛盾が生じる。従って  $T_G$  の分岐辺はすべて  $r$ -接着である。(証了)

(定理 7 の証明) 多角形  $P$  の任意の接着木を  $T_G$  とする。補題 11 により  $T_G$  のすべての分岐辺は  $r$ -接着である。従って、この接着は細分化多角形  $P'$  の辺辺接着であり、 $P'$  に辺辺接着アルゴリズムを適用することで得ることができる。(証了)

次に、多角形  $P$  が回転ベルトを持つ場合について考察する。

**補題 12** 多角形  $P$  のすべての辺の長さはある単位長  $l$  の整数倍とする。 $P$  の接着木  $T_G$  が回転ベルトパス  $p$  を持つとき、次の (1) ~ (4) が成り立つ。

- (1)  $\partial P$  のある辺  $e$  の部分線分がパス  $p$  に含まれるならば、辺  $e$  全体が  $p$  に含まれる。
- (2) パス  $p$  を囲む回転ベルト  $\tilde{p}$  の長さは  $l$  の整数倍である。
- (3) パス  $p$  上の分岐点  $v$  とつながる  $p$  の外部にある分岐辺は  $r$ -接着である。
- (4) パス  $p$  に含まれない分岐辺  $s$  で非  $r$ -接着なものが存在するとき、そのような分岐辺全体の集合は 1 つの回転ベルトパスとなる。

(証明)

(1) 辺  $e$  の部分線分がパス  $p$  に含まれているとする。背理法により、辺  $e$  全体がパス  $p$  に含まれていないと仮定する。この仮定は、辺  $e$  の像  $\pi(e)$  はパス  $p$  のある分岐点  $v$  において  $p$  の外部に出ていることを意味している。その分岐点  $v$  の周りの角を  $180^\circ$  以下の 2 つの側に分けるパスは、補題 4(3) により、 $\pi(e)$  のみである。これは  $p$  も  $v$  の周りの角を  $180^\circ$  以下の 2 つの側に分けていることに矛盾する。従って、辺  $e$  は  $p$  の外部に出ることはできず、辺  $e$  全体がパス  $p$  に含まれることになる。

(2) 回転ベルトパス  $p$  を囲む回転ベルト  $\tilde{p}$  は、(1) により  $\partial P$  のいくつかの辺の和集合である。従ってその長さは  $l$  の整数倍である。

(3) 補題 10(3) により  $v$  を端点とする分岐辺の中で非  $r$ -接着なものの個数  $k$  は 0 または 2 である。 $k = 0$  のときは明らかである。 $k = 2$  のときは  $\pi^{-1}(v)$  に頂点以外の点が含まれることに

なる。補題 4(3) により、 $v$  の周りの角を  $180^\circ$  以下の 2 つの側に分けるパスはただ 1 つであり、それが  $p$  である。従って非  $r$ -接着な 2 本の分岐辺は  $p$  に含まれることになり、分岐点  $v$  とつながる  $p$  の外部にある分岐辺は  $r$ -接着である。

(4) パス  $p$  に含まれない分岐辺  $s$  で非  $r$ -接着なものが存在すると仮定する。補題 10(5) により、 $s$  を含む回転ベルトパス  $p'$  でその分岐辺がすべて非  $r$ -接着なものが存在する。(3) により、 $p$  と  $p'$  とは共有点を持たない。また、補題 4(4) によりそのような  $p'$  は高々 1 つである。従って、パス  $p$  に含まれない分岐辺で非  $r$ -接着なもの全体は 1 つの回転ベルトパスをなす。(証了)

**定理 13** 多角形  $P$  は、すべての辺の長さがある単位長  $l$  の整数倍であり、回転ベルトを持つと仮定する。このとき、 $P$  の辺すべてを長さ  $\frac{1}{2}$  の線分に細分した細分化多角形を  $P'$  とし、 $P$  の辺すべてを長さ  $\frac{1}{4}$  の線分に細分した細分化多角形を  $P''$  とする。 $P'$  に辺辺接着アルゴリズムを適用することで得られる接着の数を  $m$ 、 $P''$  に辺辺接着アルゴリズムを適用することで得られる接着の数を  $m'$  とする。このとき  $m < m'$  である。

(証明) 細分化多角形  $P'$  に辺辺接着アルゴリズムを適用して得られる接着は、 $P''$  に辺辺接着アルゴリズムを適用することでも得られるので、 $m \leq m'$  であることは明らかである。従って、 $P'$  の辺辺接着であるが  $P'$  の辺辺接着にはならない接着を 1 つ見つければよいことになる。

多角形  $P$  は回転ベルトを持つので、回転ベルトパス  $p$  を持つ  $P$  の接着木  $T_G$  が存在する。パス  $p$  に含まれない分岐辺で非  $r$ -接着なものが存在するとすれば、補題 12(4) によりそのような分岐辺全体の集合は 1 つの回転ベルトパス  $p'$  となり、補題 12(3) によりこれら 2 本の回転ベルトパスは共通部分を持たない。したがって、高々 2 本の回転ベルトパスに含まれない、他の分岐辺はすべて  $r$ -接着である。

補題 12(2) により、回転ベルトパス  $p$  の周りの回転ベルト  $\tilde{p}$  の長さを  $nl$  ( $n > 0$ ) とする。 $\tilde{p}$  には  $n$  個の  $r$ -点と  $n$  個の  $r'$ -点があり、 $\frac{1}{2}$  間隔で交互に並んでいるので、隣り合う  $r$ -点と  $r'$ -点の中点  $x$  を 1 つ選び、 $x$  で折り返す周の二等分接着でもって  $\tilde{p}$  の接着を置き替える。この  $\tilde{p}$  の接着は  $r$ -点と  $r'$ -点が接着するので非  $r$ -接着であり  $P'$  の辺辺接着ではないが、 $P''$  の辺辺接着になっている。このような接着の選び方は  $\tilde{p}$  に  $n$  通りある。もう 1 本の回転ベルトパス  $p'$  が存在するときも同様にして、 $\tilde{p}'$  の接着を  $P'$  の辺辺接着にはならないが、 $P''$  の辺辺接着である接着に置き替える。このようにして得られた接着は、 $P''$  の辺辺接着であるが  $P'$  の辺辺接着にはならない接着である。従って、 $m < m'$  となる。(証了)

## 6 半分長定理の応用

この節では、半分長定理の応用について説明する。多角形  $P$  のすべての辺は単位長  $l$  の整数倍であると仮定する。多角形  $P$  が回転ベルトを持つのか持たないのかを直接調べることは難しい。しかし、定理 13 で述べているように、細分化多角形  $P'$  と  $P''$  に辺辺接着アルゴリズムを適用して接着の個数を調べることで、回転ベルトの有無を判定することができる。定理 7 と定理 13 から次の系が得られることは明らかである。

**系 14** 多角形  $P$  のすべての辺の長さはある単位長  $l$  の整数倍とする。このとき、 $P$  の辺すべてを長さ  $\frac{1}{2}$  の線分に細分した細分化多角形を  $P'$  とし、 $P$  の辺すべてを長さ  $\frac{1}{4}$  の線分に細分した

細分化多角形を  $P''$  とする。 $P'$  に辺辺接着アルゴリズムを適用することで得られる接着の数を  $m$ 、 $P''$  に辺辺接着アルゴリズムを適用することで得られる接着の数を  $m'$  とする。このとき次の (1)、(2) が成り立つ。

- (1)  $m = m'$  であれば、多角形  $P$  は回転ベルトを持たず、接着は  $m$  個 (有限) である。
- (2)  $m < m'$  であれば、多角形  $P$  は回転ベルトを持ち、接着は無限にある。

表 1 は図 1 の (a) と (b) に対して、一番短い辺の長さを  $l$  としたときの  $m, m'$  の値である。図 1(a) の場合は  $m < m'$  なので、系 14(2) により回転ベルトを持ち無限個の接着を持っていることが分かる。図 1(b) の場合は  $m = m'$  なので、系 14(1) により回転ベルトを持たず接着の個数は 85 個である。

表 1: 図 1 の多角形の  $m, m'$  の値

多角形	$m$	$m'$
図 1(a)	59	78
図 1(b)	85	85

次に図 1(a) の多角形について、回転ベルトがどこにあるのかを調べてみよう。細分化多角形  $P''$  の辺辺接着のいくつかを表 2 に示している。辺の番号は図 7(a) の  $v_1$  を起点として反時計回りに  $e_1, e_2, \dots, e_{56}$  と並んでいる。

表 2: 図 1(a) の細分化多角形  $P''$  の辺辺接着の例

$\{(e_1, e_2), (e_3, e_{56}), (e_4, e_{55}), (e_5, e_{20}), (e_6, e_{19}), (e_7, e_{18}), (e_8, e_{17}), (e_9, e_{16}), (e_{10}, e_{15}), (e_{11}, e_{14}), (e_{12}, e_{13}), (e_{21}, e_{54}), (e_{22}, e_{53}), (e_{23}, e_{52}), (e_{24}, e_{51}), (e_{25}, e_{40}), (e_{26}, e_{39}), (e_{27}, e_{38}), (e_{28}, e_{37}), (e_{29}, e_{36}), (e_{30}, e_{35}), (e_{31}, e_{34}), (e_{32}, e_{33}), (e_{41}, e_{50}), (e_{42}, e_{49}), (e_{43}, e_{48}), (e_{44}, e_{47}), (e_{45}, e_{46})\}$
$\{(e_1, e_{36}), (e_2, e_{35}), (e_3, e_{34}), (e_4, e_{33}), (e_5, e_{32}), (e_6, e_{31}), (e_7, e_{30}), (e_8, e_{29}), (e_9, e_{28}), (e_{10}, e_{27}), (e_{11}, e_{26}), (e_{12}, e_{25}), (e_{13}, e_{24}), (e_{14}, e_{23}), (e_{15}, e_{22}), (e_{16}, e_{21}), (e_{17}, e_{20}), (e_{18}, e_{19}), (e_{37}, e_{38}), (e_{39}, e_{56}), (e_{40}, e_{55}), (e_{41}, e_{54}), (e_{42}, e_{53}), (e_{43}, e_{52}), (e_{44}, e_{51}), (e_{45}, e_{50}), (e_{46}, e_{49}), (e_{47}, e_{48})\}$
$\{(e_1, e_{40}), (e_2, e_{39}), (e_3, e_{38}), (e_4, e_{37}), (e_5, e_{20}), (e_6, e_{19}), (e_7, e_{18}), (e_8, e_{17}), (e_9, e_{16}), (e_{10}, e_{15}), (e_{11}, e_{14}), (e_{12}, e_{13}), (e_{21}, e_{36}), (e_{22}, e_{35}), (e_{23}, e_{34}), (e_{24}, e_{33}), (e_{25}, e_{32}), (e_{26}, e_{31}), (e_{27}, e_{30}), (e_{28}, e_{29}), (e_{41}, e_{42}), (e_{43}, e_{56}), (e_{44}, e_{55}), (e_{45}, e_{54}), (e_{46}, e_{53}), (e_{47}, e_{52}), (e_{48}, e_{51}), (e_{49}, e_{50})\}$
$\{(e_1, e_{40}), (e_2, e_{39}), (e_3, e_{38}), (e_4, e_{37}), (e_5, e_{28}), (e_6, e_{27}), (e_7, e_{26}), (e_8, e_{25}), (e_9, e_{24}), (e_{10}, e_{23}), (e_{11}, e_{22}), (e_{12}, e_{21}), (e_{13}, e_{20}), (e_{14}, e_{19}), (e_{15}, e_{18}), (e_{16}, e_{17}), (e_{29}, e_{36}), (e_{30}, e_{35}), (e_{31}, e_{34}), (e_{32}, e_{33}), (e_{41}, e_{42}), (e_{43}, e_{56}), (e_{44}, e_{55}), (e_{45}, e_{54}), (e_{46}, e_{53}), (e_{47}, e_{52}), (e_{48}, e_{51}), (e_{49}, e_{50})\}$

辺辺接着  $(e_i, e_j)$  のうち、 $i + j \equiv 1 \pmod{4}$  となっているものは  $r$ -接着であり、 $i + j \equiv 3 \pmod{4}$  となっているものは非  $r$ -接着である。表では非  $r$ -接着に下線を引いている。4 例とも、非  $r$ -接着が含まれるので、 $P''$  の辺辺接着であるが  $P'$  の辺辺接着になっていないものである。 $P''$  の辺辺接着にはこのようなものが  $m' - m = 19$  個ある。この 19 個の接着についてさらに調べていく。

表 2 の最初の接着について見てみると、下線を引いた部分の接着から回転ベルトの場所が特定でき、それは  $\partial P$  の 3 辺  $v_1v_2, v_4v_5, v_8v_1$  であることが分かる。また下線を引いていない部分の接着から回転ベルトパス以外の接着の状況が分かる。これをもとにして接着木を書いてみる

と第4節の図10となる。そこでの回転ベルトパスは  $p = v_1w$  であり、回転ベルト  $\tilde{p}$  の長さは  $6l$  なので、この回転ベルトパスに関わる  $P''$  の非  $r$ -接着は6通りあるはずだが、実際19個の接着のなかにその6個が見つかる。

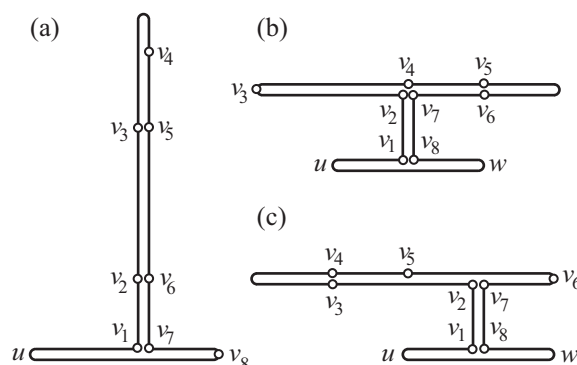


図13: 回転ベルト3種

表2の残る3つの接着についても同様に調べてみると、それぞれの接着は図13の(a), (b), (c)に対応することがわかる。(a)の回転ベルトパスは  $uv_8$ 、回転ベルトの長さは  $5l$  で関連する接着は5通り、(b)の回転ベルトパスは  $uw$ 、回転ベルトの長さは  $4l$  で関連する接着は4通り、(c)の回転ベルトパスは  $uw$ 、回転ベルトの長さは  $4l$  で関連する接着は4通りである。

以上により19個の接着すべてを調査できたことになり、図1(a)の多角形には、4種類の異なる回転ベルトのパターンがあることが判明する。

最後に、本研究はJSPS 科研費 24501058の研究助成を受けて行われた研究成果であることを述べてしめくりたい。

## 参考文献

- [1] Anna Lubiw and Joseph O'Rourke, *When Can a Polygon Fold to a Polytope ?*, Technical Report 048, Dept. Comput. Sci., Smith College 1996. Presented at AMS Conf., 1996.
- [2] Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Anna Lubiw, Joseph O'Rourke, *Enumerating Foldings and Unfoldings Between Polygons and Polytopes*, *Graphs and Combinatorics*, 18, 93–104 (2002),
- [3] 平田浩一, 幾何教材としての多面体と展開図, 日本数学教育学会誌 第87回総会特集号(長野大会), 第87巻 臨時増刊, p.487, 2005.
- [4] ドメイン・オルーク著, 上原隆平訳, 幾何的な折りアルゴリズム リンケージ, 折り紙, 多面体, 近代科学, 2009.
- [5] 平田浩一, Demaine-O'Rourkeの折りたたみアルゴリズム, 数学セミナー, 48-1, pp.34-39, 2009.
- [6] <http://www.ed.ehime-u.ac.jp/~hirata/folding/>