

第12回数学史研究発表会報告1

作図教材としての算額

愛媛大学教育学部 平田 浩一

1 はじめに

これまで作図問題について学生や院生と共同して研究を行ってきた。半年ほど前、愛媛和算研究会にて算額の図形問題に触れる機会を得てから、「算額の図形問題を定規とコンパスを用いて作図問題として解くことはできないか」ということに興味を持つようになった。

算額の図形問題は、作図問題としてみたときその多くが難問であり、簡単には解決できそうにない。その一方で、問題によっては、計算問題として考えるより作図問題として考えた方が、見通しがよいものもかなりある。そこでこの小論では、作図問題として算額にチャレンジするときには有用なテクニックとしての作図問題を収集し、算額への応用について例をあげて解説を試みることにする。

作図題の解法には、(1) 解析、(2) 作図、(3) 証明、(4) 吟味の4段階があるが、この小論では簡潔のため作図段階のみを述べることとし、解析・証明・吟味は省略する。

2 基本作図

最初に、基本作図の概略について説明する。大半は初等的なものであるため、一部を除き作図は省略している。

作図題2.1 $\angle AOB$ が与えられている。 $\angle AOB$ の二等分線を作図せよ。

作図題2.2 線分 AB が与えられている。 AB の垂直二等分線を作図せよ。

作図題2.3 点 P と直線 l が与えられている。 P を通り l に垂直な直線を作図せよ。

作図題2.4 直線 l とその上にない点 P が与えられている。 P を通り l に平行な直線を作図せよ。

作図題2.5 半直線 OA と $\angle a$ が与えられている。 $\angle AOB = \angle a$ となる半直線 OB を作図せよ。

作図題2.6 線分 AB と長さ a, b が与えられている。 AB を $a:b$ に内分及び外分する点を作図せよ。

作図題2.7 円 O と点 A が与えられている。 A を通る円 O の接線を作図せよ。

(作図) 線分 AO を直径とする円と円 O の交点を T とする。直線 AT が求める接線である。

作図題2.8 長さ a, b が与えられている。長さ \sqrt{ab} を作図せよ。

(作図) 一直線上に3点P, A, Bを $PA=a$, $PB=b$ となるようにとる。線分ABを直径とする円に点Pから接線PTを引く。このとき、方べきの定理より $PT^2=PA \cdot PB$ となるので、PTが求める長さ \sqrt{ab} である。

作図題2.9 2円 O_1, O_2 が与えられている。2円の共通接線を作図せよ。

(作図) 2円 O_1, O_2 の半径をそれぞれ r_1, r_2 とする。線分 O_1O_2 を $r_1:r_2$ に内分(または外分)する点をNとする。Nから円 O_1 に接線 l を引く。直線 l が求める共通接線である。

作図題2.10 2点A, Bと長さ a, b が与えられている。 $AP:BP=a:b$ となる点Pの軌跡(アポロニウスの円)を作図せよ。

(作図) 線分ABを $a:b$ に内分する点をC, 外分する点をDとする, 線分CDを直径とする円が求める軌跡である。

3 円の作図 I

算額には円に関する問題が多数ある。この節では、円と関連のある作図題として、半径 r の円を作図する問題を6題とりあげる。

作図題3.1 2点A, Bと長さ r が与えられている。2点A, Bを通る半径 r の円を作図せよ。

(作図) 点Aを中心とする半径 r の円と、点Bを中心とする半径 r の円との交点をOとする。Oを中心とする半径 r の円が求める図形である。[解は最大2個]

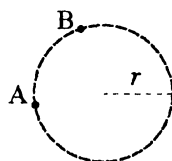


図 1: 作図題 3.1

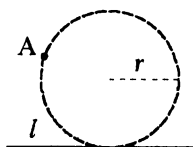


図 2: 作図題 3.2

作図題3.2 点A, 直線 l と長さ r が与えられている。点Aを通り直線 l に接する半径 r の円を作図せよ。

(作図) 直線 l から距離 r だけ離れた直線を l' とする。点Aを中心とする半径 r の円と直線 l' との交点をOとする。Oを中心とする半径 r の円が求める図形である。[解は最大2個]

作図題3.3 2直線 l, m と長さ r が与えられている。2直線 l, m に接する半径 r の円を作図せよ。

(作図) 2直線 l, m から距離 r だけ離れた直線をそれぞれ l', m' とする。 l', m' の交点をOとする。Oを中心とする半径 r の円が求める図形である。[解は一般に4個]

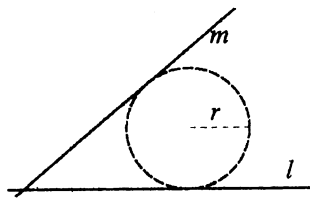


図 3: 作図題 3.3

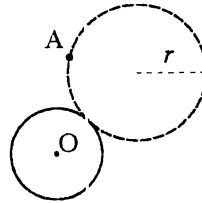


図 4: 作図題 3.4

作図題 3.4 円 O , 点 A と長さ r が与えられている。円 O に接し点 A を通る半径 r の円を作図せよ。

(作図) 円 O の半径を r_0 とする。点 O を中心とする半径 $|r_0 \pm r|$ の円と、点 A を中心とする半径 r の円との交点を O' とする。 O' を中心とする半径 r の円が求める図形である。[解は最大 4 個]

作図題 3.5 円 O , 直線 l と長さ r が与えられている。円 O と直線 l に接する半径 r の円を作図せよ。

(作図) 円 O の半径を r_0 とする。直線 l から距離 r だけ離れた直線を l' とする。点 O を中心とする半径 $|r_0 \pm r|$ の円と直線 l' との交点を O' とする。 O' を中心とする半径 r の円が求める図形である。[解は最大 8 個]

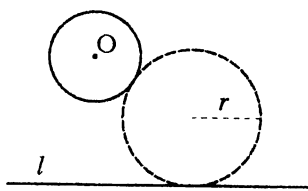


図 5: 作図題 3.5

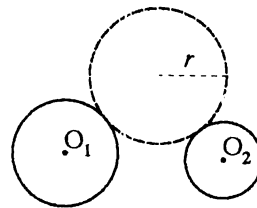


図 6: 作図題 3.6

作図題 3.6 2 円 O_1, O_2 と長さ r が与えられている。2 円 O_1, O_2 に接する半径 r の円を作図せよ。

(作図) 2 円 O_1, O_2 の半径をそれぞれ r_1, r_2 とする。点 O_1 を中心とする半径 $|r_1 \pm r|$ の円と、点 O_2 を中心とする半径 $|r_2 \pm r|$ の円との交点を O とする。 O を中心とする半径 r の円が求める図形である。[解は最大 8 個]

4 円の作図 II

次に、3つの図形で決まる円の作図問題を 10 題とりあげる。与えられた図形 (点・直線・円)

に対して求める円は、与えられた点を通り、与えられた直線と円に接するものである。

作図題4.1 3点A, B, Cが与えられている。3点A, B, Cを通る円を作図せよ。

(作図) $\triangle ABC$ の外接円を作図すればよい。具体的には、線分ABの垂直二等分線と線分ACの垂直二等分線の交点Oを中心として、半径OAの円が求める図形である。[図8, 解は一般に1個]

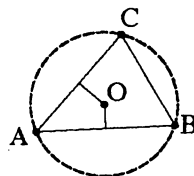
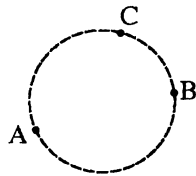


図7: 作図題4.1 図8: 作図題4.1の作図

作図題4.2 直線*l*と2点A, Bが与えられている。直線*l*に接し2点A, Bを通る円を作図せよ。

(作図) 直線ABと*l*との交点をPとする。直線*l*上に $PT^2=PA \cdot PB$ となる点Tを作図する(作図題2.8)。3点A, B, Tを通る円が求める図形である。[図10, 解は最大2個]

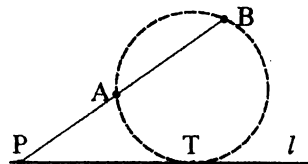
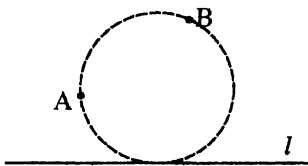


図9: 作図題4.2 図10: 作図題4.2の作図

作図題4.3 2直線*l*, *m*と点Aが与えられている。2直線*l*, *m*に接し点Aを通る円を作図せよ。

(作図) 2直線*l*, *m*のなす角の二等分線*n*とする。*n*に関しAと対称な点をBとする。直線*l*に接し2点A, Bを通る円が求める図形である。[図12, 解は一般に2個]

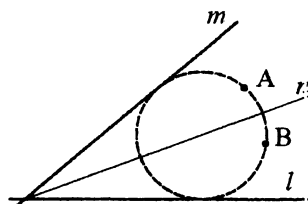
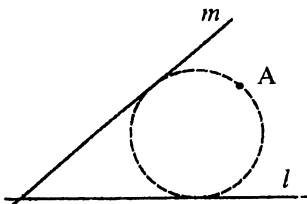


図11: 作図題4.3 図12: 作図題4.3の作図

作図題 4.4 3直線 l, m, n が与えられている。3直線 l, m, n に接する円を作図せよ。

(作図) 3直線 l, m, n の作る三角形の内接円・傍接円を作図すればよい。具体的には、2直線 l, m のなす角の二等分線 (2本あることに注意) を l_1 、2直線 l, n のなす角の二等分線を l_2 とし、 l_1 と l_2 の交点を O とする。 O から直線 l に垂線 OH を引く。中心 O 、半径 OH の円が求める図形である。[図 14, 解は一般に4個]

作図題 4.5 円 O と2点 A, B が与えられている。円 O に接し2点 A, B を通る円を作図せよ。

(作図) 円 O の周上の1点を C とする。3点 A, B, C を通る円と円 O の交点のうち C 以外の点を D とする。直線 AB と直線 CD の交点を P とする。 P から円 O に接線を引きその接点を T とする。3点 A, B, T を通る円が求める図形である。[図 16, 解は最大2個]

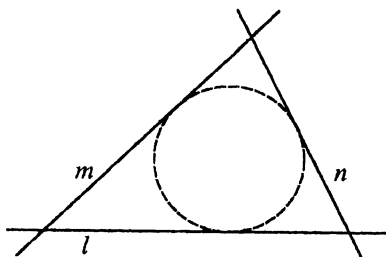


図 13: 作図題 4.4

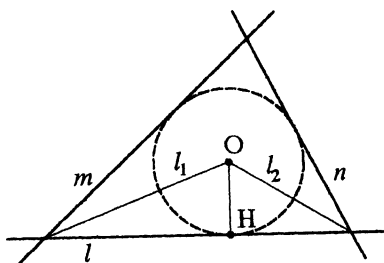


図 14: 作図題 4.4 の作図

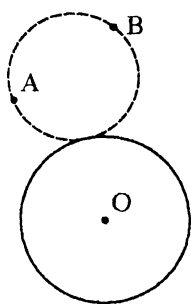


図 15: 作図題 4.5

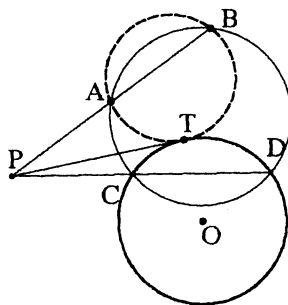


図 16: 作図題 4.5 の作図

作図題 4.6 円 O 、直線 l 、点 A が与えられている。円 O と直線 l に接し、点 A を通る円を作図せよ。

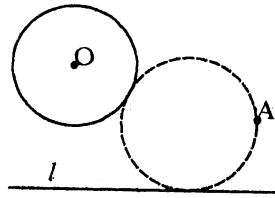


図 17: 作図題 4.6

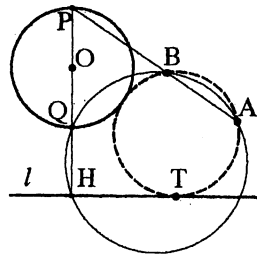


図 18: 作図題 4.6 の作図

(作図) 中心Oから直線 l に垂線OHを引く。直線OHと円Oの2交点をP, Qとする。2交点のどちらをPにするかで2通りの場合があることに注意。直線PA上の点Bで、式 $\vec{PQ} \cdot \vec{PH} = \vec{PA} \cdot \vec{PB}$ をみたすものを作図する。具体的には、3点A, H, Qを通る円と直線PAとの交点のうち、A以外の点をBとする。直線 l に接し2点A, Bを通る円(作図題4.2)が求める図形である。[図18, 解は最大4個]

作図題4.7 円Oと2直線 l, m が与えられている。円Oと2直線 l, m に接する円を作図せよ。

(作図) 円Oの半径を r とする。2直線 l, m から距離 r だけ離れた直線をそれぞれ l', m' とする。2直線 l', m' に接し点Oを通る円(作図題4.3)を作図し、その中心を O' 半径を r' とする。 O' を中心とし半径 $|r' \pm r|$ の円のうち、題意をみたすものが求める図形である。[図20, 解は最大8個]

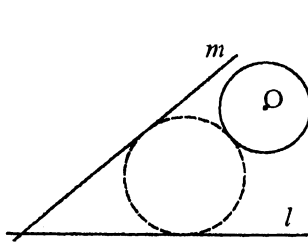


図 19: 作図題 4.7

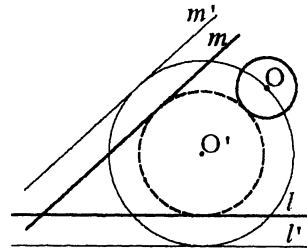


図 20: 作図題 4.7 の作図

作図題4.8 2円 O_1, O_2 と点Aが与えられている。2円 O_1, O_2 に接し点Aを通る円を作図せよ。

(作図) 2円 O_1, O_2 の半径をそれぞれ r_1, r_2 とする。線分 O_1O_2 を $r_1:r_2$ に外分(または内分)する点をNとする。このときNは2円 O_1, O_2 の相似の中心である。円 O_1 と直線 O_1O_2 の2交点を P_1, Q_1 とする。Nを中心とする相似対応で、 P_1, Q_1 に対応する円 O_2 上の点をそれぞれ P_2, Q_2 とする。直線NA上の点Bで、式 $\vec{NQ_1} \cdot \vec{NP_2} = \vec{NA} \cdot \vec{NB}$ をみたすものを作図する。具体的に

は、3点A, Q_1 , P_2 を通る円と直線NAとの交点のうち、A以外の点をBとする。円 O_1 に接し2点A, Bを通る円（作図題4.5）が求める図形である。[図22, 解は最大4個]

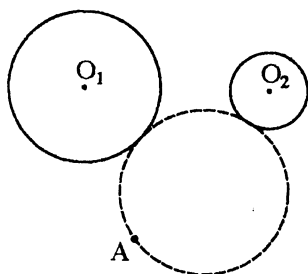


図 21: 作図題 4.8

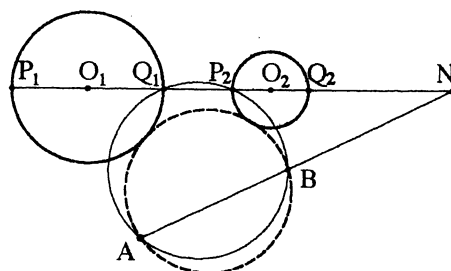


図 22: 作図題 4.8 の作図

作図題4.9 2円 O_1 , O_2 と直線 l が与えられている。2円 O_1 , O_2 と直線 l に接する円を作図せよ。

(作図) 2円 O_1 , O_2 の半径をそれぞれ r_1 , r_2 ($r_1 \geq r_2$) とする。 O_1 を中心とし半径 $r_1 \pm r_2$ の円を、円 O'_1 と呼ぶことにする。直線 l から距離 r_2 離れた直線を l' とする。円 O'_1 と直線 l' に接し点 O_2 を通る円（作図題4.6）を作図し、その中心を O , 半径を r とする。 O を中心とし半径 $|r \pm r_2|$ の円のうち、題意をみたすものが求める図形である。[図24, 解は最大8個]

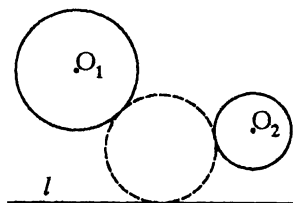


図 23: 作図題 4.9

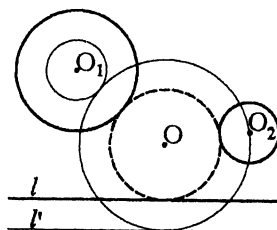


図 24: 作図題 4.9 の作図

作図題4.10 3円 O_1 , O_2 , O_3 が与えられている。3円 O_1 , O_2 , O_3 に接する円を作図せよ。

(作図) 3円 O_1 , O_2 , O_3 の半径をそれぞれ r_1 , r_2 , r_3 ($r_1, r_2 \geq r_3$) とする。点 O_1 を中心とし半径 $r_1 \pm r_3$ の円を、円 O'_1 と呼ぶことにする。同様に、点 O_2 を中心とし半径 $r_2 \pm r_3$ の円を、円 O'_2 と呼ぶ。2円 O'_1 , O'_2 に接し点 O_3 を通る円（作図題4.8）を作図し、その中心を O , 半径を r とする。 O を中心とし、半径 $|r \pm r_3|$ の円のうち、題意をみたすものが求める図形である。[図26, 解は最大8個]

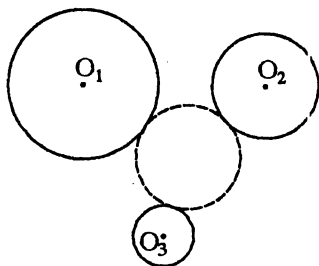


図 25: 作図題 4.10

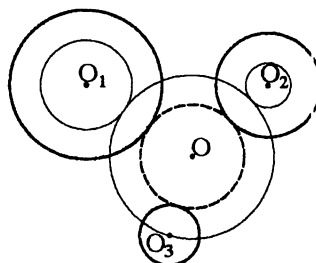


図 26: 作図題 4.10 の作図

5 算額の問題への応用

ここでは、実際の算額の問題を作図題として4題とりあげ、その解法について説明を行う。

算額問題5.1 (大洲市法眼寺-岩田清謹の算額) 大洞家の家紋がある。図27のように5つの等円があり、その中に心円がある。このとき、心円の直径と等円の直径の比の値はいくらか。

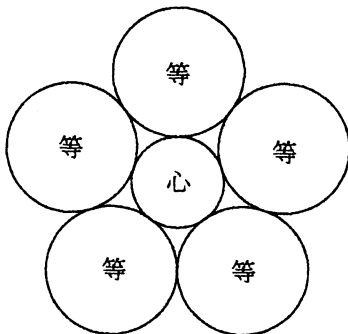


図 27: 算額問題 5.1

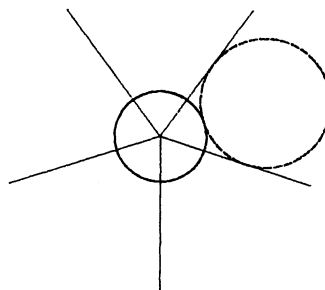


図 28: 作図題 5.1 の作図

この問題を作図題として焼き直すと次のようになる。

作図題5.1 心円が与えられている。図27のように心円のまわりに5つの等円を作図せよ。

(作図) 正五角形の作図法を用いて、心円の中心から放射状に5本の半直線を引き中心角を5等分する。正五角形の作図法については [2]などを参照のこと。続いて、作図題4.7を用いて、心円と2つの半直線に接する円を作図する。[図28]

算額問題5.2 (松山市伊佐爾波神社-桐野富五郎の算額) 図29のように、甲、乙、丙、丁5円がある。甲円の直径27寸、乙円の直径21寸、丁円の直径9寸のとき、丙円の直径はいくらか。

作図教材としての算額

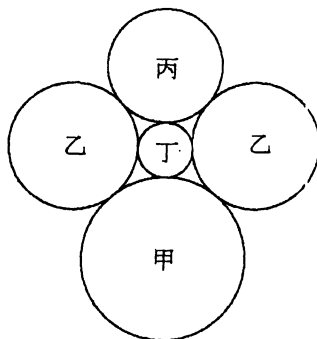


図 29: 算額問題 5.2

作図題 5.2 甲, 乙, 丁 3 円の半径が与えられている。図 29 のように, 丁 円のまわりに互いに接する甲, 乙, 丙 4 円を作図せよ。

(作図) 与えられた半径で丁 円をかく。丁 円に接する与えられた半径の甲 円をかく。作図題 3.6 を用いて, 甲 円と丁 円に接するように与えられた半径の乙 円を 2 つ作図する。作図題 4.10 を用いて, 丁 円と 2 つの乙 円に接する丙 円を作図する。

算額問題 5.3 (松山市伊佐爾波神社 - 高坂金治郎の算額) 図 30 のように, 中心角 120 度の扇形内に線分を引き, 東 円を 1 個, 西, 南, 北 円をそれぞれ 2 個を容れる。南 円の直径が既知のとき, 北 円の直径を求める術を問う。

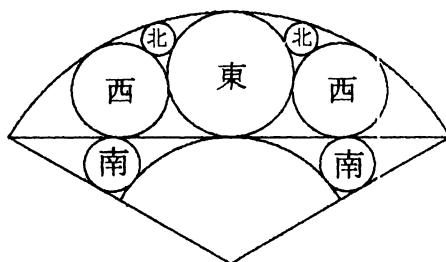


図 30: 算額問題 5.3

作図題 5.3 中心角 120 度の扇形が与えられている。図 30 のように, 扇形内に線分を引き, 線分の下側に扇形 1 個と南 円 2 個, 線分の上側に東 円 1 個, 西 円と北 円それぞれ 2 個を作図せよ。

(作図) 扇形内に線分を引く。その下側に線分に接する扇形をかく。作図題 4.7 を用いて, 扇形と 2 線分に接する南 円を作図する。線分の上側に東 円をかく。作図題 4.9 を用いて, 扇形, 東 円, 線分に接する西 円を作図する。作図題 4.10 を用いて, 扇形, 東 円, 西 円に接する北 円を作図する。

算額問題 5.4 (松山市伊佐爾波神社 - 簡野主計の算額) 図 31 のように, 直角三角形内に垂

線と長方形をかき、そのすき間に大中小3円を入れる。直角三角形の辺の長さが既知のとき、大中小3円の直径はそれぞれいくらか。

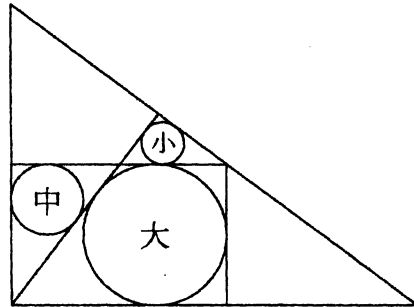


図 31: 算額問題 5.4

作図題 5.4 直角三角形が与えられている。図 31 のように、直角三角形内に垂線と長方形、及びそのすき間に入る大中小3円を作図せよ。

(作図) 与えられた直角三角形を $\triangle OAB$ とする。頂点 O から対辺 AB に垂線 OH を引く。線分 OH と OA に接する適当な半径の円(作図題 3.3)をかき、その円に接する長方形 $P'Q'R'O$ をかく。直線 OP' と辺 AB の交点を P とする。[図 32]

線分 OP を対角線とする長方形 $PQOR$ をかき、3線分 HO, OR, RP に接する大円(作図題 4.4)を作図する。同様にして、3線分 PQ, QO, OH に接する中円と、3線分 QP, PH, HO に接する小円を作図する。[図 33]

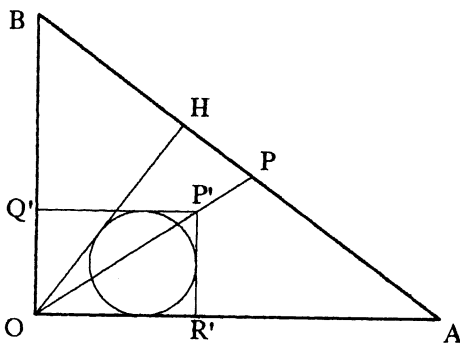


図 32: 作図題 5.4 の作図 1

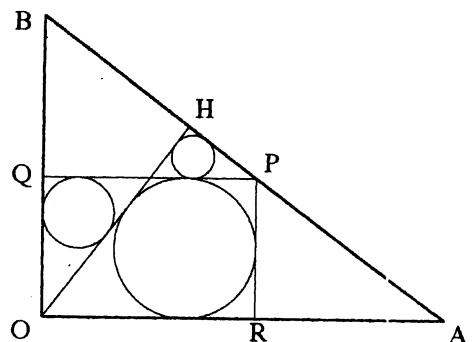


図 33: 作図題 5.4 の作図 2

参考文献

- [1] 岩田至康編, 幾何学大辞典 第1巻 基本定理と問題 (平面), 槇書店, 1971.
- [2] 大野栄一, 定木とコンパスで挑む数学 — 四則計算から作図不能問題まで, 講談社ブルーバックス, 1993.