六斜術とトレミーの定理の関係について

平田浩一 *

Relations between Rokushajutsu and Ptolemy's Theorem

Koichi HIRATA *

Abstract: The purpose of this note is to consider relations between Rokushajutsu and Ptolemy's Theorem. In the process, we give the necessary and sufficient condition for arbitrarily given six lengths becoming the six edge lengths of some tetrahedron, by using the notation of Rokushajutsu.

Keywords: Rokushajutsu, Ptolemy's Theorem.

1　はじめに

この研究は六斜術とトレミーの定理の関係について考察することが目的である．その過程で六斜術の公式の持っている知られざる側面として，任意に与えられた 6 つの長さが 4 面体の 6 辺となるための必要十分条件が六斜術で表現できることを紹介する．

まずはこれら二つの定理を述べることから始めることにする．最初は六斜術で，和算での基本公式の一つである．文献 [4, pp.73–77] には，六斜術とその応用についてよい解説が載っている．以下では，(異なる)4 点 O, A, B, C に対して，それらを結ぶ 6 本の線分の長さを OA = a, OB = b, OC = c, BC = x, CA = y, AB = z と表すことにする．

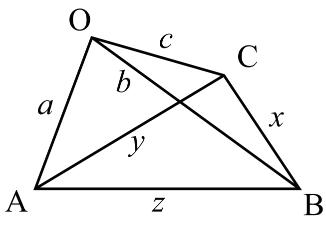

図 1: 六斜術

定理 1.1 (六斜術 [1, p.380] [4, p.73])　平面四角形 OABC に対し

$$a^2x^2(-a^2+b^2+c^2-x^2+y^2+z^2)+b^2y^2(a^2-b^2+c^2+x^2-y^2+z^2)$$
$$+c^2z^2(a^2+b^2-c^2+x^2+y^2-z^2)-(a^2b^2z^2+b^2c^2x^2+c^2a^2y^2+x^2y^2z^2)=0$$

が成り立つ．

続いてトレミーの定理である．トレミーの定理には 2 つの拡張版があるのであわせて取りあげる．

*愛媛大学教育学部　Faculty of Education, Ehime University

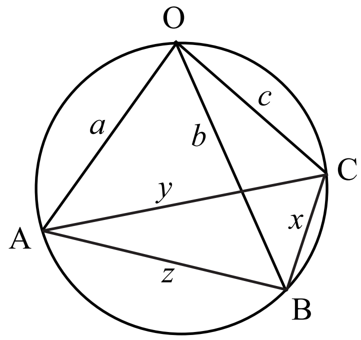

図 2: トレミーの定理

定理 1.2 (トレミーの定理 [1, p. 250]) 円に内接する四角形 OABC に対し $ax + cz = by$ が成り立つ.

定理 1.3 ([5, pp. 45–47]) 平面四角形 OABC に対し $ax + cz \geqq by$ が成り立つ. ここで, 等号が成立するのは四角形が円に内接するときである.

定理 1.4 ([5, pp. 45–47]) 四面体 OABC に対し $ax + cz > by$ が成り立つ.

2 準備

この節では, この研究のための準備として, 幾つかの用語を定義する.

定義 2.1 (六斜)

(1) **六斜** $abcxyz$ とは, 任意に与えられた 6 つの (正の) 長さ a, b, c, x, y, z のことをいう.

(2) 六斜 $abcxyz$ が**実現可能**であるとは, (3 次元) 空間内の 4 点 O, A, B, C で, $\mathrm{OA} = a$, $\mathrm{OB} = b$, $\mathrm{OC} = c$, $\mathrm{BC} = x$, $\mathrm{CA} = y$, $\mathrm{AB} = z$ を満たすものが存在するときをいう. このとき 4 点 OABC を六斜 $abcxyz$ の実現という.

(3) 六斜 $abcxyz$ が**平面的**であるとは, 六斜の実現 OABC で 4 点 O, A, B, C が同一平面上にあるものが存在するときをいう.

(4) 六斜 $abcxyz$ が**四面体をなす**とは, 六斜が実現可能で平面的でないときをいう.

(5) 六斜 $abcxyz$ に対し, abz, ayc, xbc, xyz の 4 つを**面**と呼ぶ.

次節で六斜が実現可能であるための条件について考察する. その前にこの節では「三斜」の実現可能性についておさらいする. そのため六斜と同様に三斜を定義する.

定義 2.2

(1) **三斜** abc とは, 任意に与えられた 3 つの (正の) 長さ a, b, c のことをいう.

(2)　三斜 abc が**実現可能**であるとは，平面内の 3 点 A, B, C で，BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$ を満たすものが存在するときをいう．このとき 3 点 ABC を三斜 abc の実現という．

(3)　三斜 abc が**直線的**であるとは，三斜の実現 ABC で 3 点 A, B, C が同一直線上にあるものが存在するときをいう．

(4)　三斜 abc が**三角形をなす**とは，三斜が実現可能で直線的でないときをいう．

以下はよく知られた三角形の成立条件である．

定理 2.1

(1)　三斜 abc が三角形をなすための必要十分条件は

$$-a+b+c>0,\quad a-b+c>0,\quad a+b-c>0$$

の 3 不等式が同時に成り立つことである．

(2)　三斜 abc が直線的であるための必要十分条件は

$$-a+b+c \geqq 0,\quad a-b+c \geqq 0,\quad a+b-c \geqq 0$$

の 3 不等式が同時に成り立ち，かつ少なくとも一つの等号が成り立つことである．

(3)　三斜 abc が実現可能でないための必要十分条件は

$$-a+b+c<0,\quad a-b+c<0,\quad a+b-c<0$$

の 3 不等式の一つが成り立つことである．

3 つの不等式 $-a+b+c \leqq 0,\quad a-b+c \leqq 0,\quad a+b-c \leqq 0$ が互いに排反 (2 式が同時に成立することはない) であることと定理 2.1 により，式 $H(a,b,c)$ を

$$H(a,b,c)=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \tag{1}$$

とおくとき，上の定理は次のように一つの式にまとめることができる．

定理 2.2

(1)　三斜 abc が三角形をなすための必要十分条件は $H(a,b,c)>0$ である．

(2)　三斜 abc が直線的であるための必要十分条件は $H(a,b,c)=0$ である．

(3)　三斜 abc が実現可能でないための必要十分条件は $H(a,b,c)<0$ である．

式 $H(a,b,c)$ 中の因数 $(a+b+c)$ はなくてもよいように思われるが，実は代数的に非常に重要である．次の 2 つの展開式を比較して頂きたい．

$$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)-a^3-b^3-c^3-2abc \tag{2}$$

$$H(a,b,c)=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^4-b^4-c^4 \tag{3}$$

前者の式 (2) は $(a,b,c)=(3,4,5)$ を代入したときと $(a,b,c)=(3,4,-5)$ を代入したときでは値が異なるのに対し，後者の式 (3) はどちらを代入しても同じ値をとる．つまり絶対値さえ等

しければ正の数を代入しても負の数を代入してもかまわないという代数的によい性質を持っている．そのため $H(a,b,c)$ を用いた場合は，次のように負の実数にも対応できる形で定理を書き直すことができる．

系 2.1　a,b,c を 0 でない実数とする．

(1)　三斜 $|a||b||c|$ が三角形をなすための必要十分条件は $H(a,b,c) > 0$ である．

(2)　三斜 $|a||b||c|$ が直線的であるための必要十分条件は $H(a,b,c) = 0$ である．

(3)　三斜 $|a||b||c|$ が実現可能でないための必要十分条件は $H(a,b,c) < 0$ である．

ここで，以下で用いるグラム行列式について簡単に触れておく．簡単のため 3 つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の場合で説明するが，一般の n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ に対して成立する．

定義 2.3 ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ に対して，行列式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} \end{vmatrix}$$

をグラム行列式といい，記号 $G(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ で表す．

定理 2.3 （[3, pp. 91–92]）ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ が一次従属であるための必要十分条件は $G(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = 0$ である．

グラム行列式を用いて定理 2.2(2) の必要条件の部分に証明をつけてみる．またその過程で式 $H(a,b,c)$ がごく自然に導かれることにも注意してほしい．

(定理 2.2(2) 必要条件の証明)
三斜 abc の実現を 3 点 A, B, C とする．ベクトル $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ を，

$$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}, \quad \boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

とおく．仮定より 3 点 A, B, C は同一直線上にあるのでベクトル $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ が一次従属となる．従っ

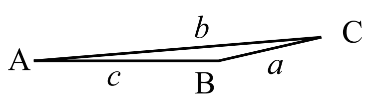

図 3: 三斜 abc が直線的

て，ベクトル $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ のグラム行列式 $G(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ は 0 である．そこで，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = b^2$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = (b^2+c^2-a^2)/2$, $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} = c^2$ であることを用いて，グラム行列式を計算すると，

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} b^2 & (b^2+c^2-a^2)/2 \\ (b^2+c^2-a^2)/2 & c^2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \end{aligned}$$

ゆえに，$G(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \frac{1}{4}H(a, b, c) = 0$ である．(証了)

実は，この $H(a, b, c)$ は何かというと，$s = (a + b + c)/2$ とおいてみると，

$$H(a, b, c) = 16s(s - a)(s - b)(s - c) \tag{4}$$

となるので，三角形 ABC の面積 S を求めるヘロンの公式と密接な関係がある．

$$S = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} = \frac{1}{4}\sqrt{H(a, b, c)}$$

すなわち，

$$H(a, b, c) = 16S^2 \tag{5}$$

である．

3 六斜術

六斜術 (定理 1.1) の左辺を，$K(a, b, c; x, y, z)$ と表すことにする．

$$\begin{aligned} &K(a, b, c; x, y, z) \\ &= a^2x^2(-a^2 + b^2 + c^2 - x^2 + y^2 + z^2) + b^2y^2(a^2 - b^2 + c^2 + x^2 - y^2 + z^2) \\ &+ c^2z^2(a^2 + b^2 - c^2 + x^2 + y^2 - z^2) - (a^2b^2z^2 + b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + x^2y^2z^2) \end{aligned} \tag{6}$$

最初に六斜術の簡単な証明を紹介する．その前に前節で定義した六斜を用いて定理を書き直しておく．

定理 3.1 (六斜術)　六斜 $abcxyz$ が平面的であれば，$K(a, b, c; x, y, z) = 0$ が成り立つ．

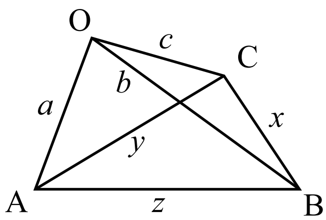

図 4: 六斜術の証明

(証明)　4 点 OABC に対し，ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を，

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad \boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

とおくとき，六斜は平面的なので 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は一次従属である．

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a^2 && \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a^2 + b^2 - z^2)/2 && \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = (a^2 + c^2 - y^2)/2 \\ &\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = b^2 && \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = (b^2 + c^2 - x^2)/2 && \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} = c^2 \end{aligned}$$

これらをもちいてグラム行列式を計算すると

$$G(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a^2 & \frac{a^2+b^2-z^2}{2} & \frac{a^2+c^2-y^2}{2} \\ \frac{a^2+b^2-z^2}{2} & b^2 & \frac{b^2+c^2-x^2}{2} \\ \frac{a^2+c^2-y^2}{2} & \frac{b^2+c^2-x^2}{2} & c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}K(a,b,c;x,y,z) = 0$$

を得る．(証了)

ここで，六斜術の意味について考えてみる．5 つの長さ a,b,c,x,y が与えられていて，三斜 xbc と三斜 ayc がそれぞれ三角形 OBC と三角形 OCA をなしていると仮定する．このとき三角形 OBC と三角形 OCA(または三角形 OCA′) は図 5 のように，辺 OC $= c$ を共有して同一平面上にある．ここで，AB $= z_1$, A′B $= z_2$ とおく．方程式 $K(a,b,c;x,y,z) = 0$ を，z についての方程式と見るとき，4 次方程式 (複 2 次) であり，定理 3.1 により，それは 4 実解 $z = \pm z_1, \pm z_2$ をもつ．従って，六斜術は，5 つの長さ a,b,c,x,y が与えられたとき，他の 1 辺 z を計算する方程式である．

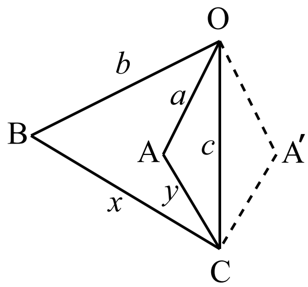

図 5: 六斜術の意味

次に，同じ図で辺 OC を共有する 2 面 OBC と OCA のなす角 θ が $0 < \theta < \pi$ となるように，4 点 OABC を 3 次元空間上にとるとき，OABC は四面体となる．この四面体の辺 AB の長さ z は $z_1 < z < z_2$ を満たしていることは明らかである．これらのことをまとめると次の定理を得る．

定理 3.2　5 つの (正の) 長さ a,b,c,x,y が与えられ，三斜 xbc と三斜 ayc が共に三角形をなすならば，z についての複 2 次方程式 $K(a,b,c;x,y,z) = 0$ は正の実解を 2 つ ($z = z_1, z_2$) と負の実解を 2 つ ($z = -z_1, -z_2$) もち，次の (1)〜(3) が成り立つ．ただし，($0 < z_1 < z_2$) とする．

(1)　六斜 $abcxyz_1$ と六斜 $abcxyz_2$ は平面的である．

(2)　z が $z_1 < z < z_2$ の範囲にあるとき，六斜 $abcxyz$ は四面体をなす.

(3)　z が $0 < z < z_1$ または $z_2 < z$ のとき，六斜 $abcxyz$ は実現不可能である．

次の定理も同様にして (図 6 参照) 得ることができる．

定理 3.3　5 つの (正の) 長さ a,b,c,x,y が与えられ，三斜 xbc が三角形をなし三斜 ayc が直線的ならば，z について複 2 次方程式 $K(a,b,c;x,y,z) = 0$ は正の重解を 1 つ ($z = z_1$) と負の重解を 1 つ ($z = -z_1$) 持つ．このとき，次の (1)，(2) が成り立つ．

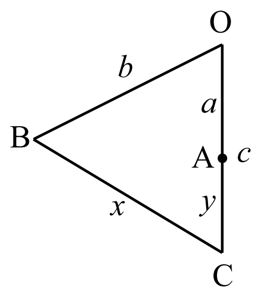

図 6: 定理 3.3

(1)　六斜 $abcxyz_1$ は平面的である．

(2)　z が $0 < z \neq z_1$ であるとき，六斜 $abcxyz$ は実現不可能である．

次に六斜術と密接な関係がある，四面体の体積を六斜 $abcxyz$ から求めるオイラーの公式を紹介する．

定理 3.4 (オイラーの公式 [2, pp. 247–248])　六斜 $abcxyz$ が 4 点 OABC で実現可能であば，四面体 OABC(4 点 OABC の凸包) の体積 V について

$$144V^2 = K(a, b, c; x, y, z) \tag{7}$$

が成り立つ．特に，六斜 $abcxyz$ が実現可能ならば $K(a, b, c; x, y, z) \geqq 0$ であり，六斜 $abcxyz$ が四面体をなすならば $K(a, b, c; x, y, z) > 0$ である．

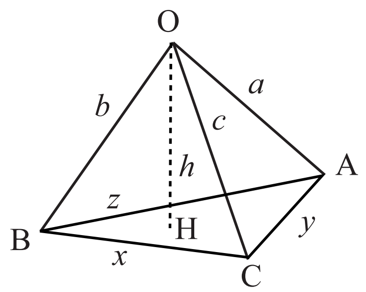

図 7: 四面体の体積

(証明)　頂点 O から面 ABC に下ろした垂線の足を点 H とする．$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\boldsymbol{h} = \overrightarrow{\mathrm{OH}}$ とおくとき，4 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{h}$ は一次従属である．そこで，

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a^2 && \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a^2 + b^2 - z^2)/2 \\
&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = (a^2 + c^2 - y^2)/2 && \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{h} = h^2 \\
&\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = b^2 && \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = (b^2 + c^2 - x^2)/2 \\
&\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{h} = h^2 && \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} = c^2 \\
&\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{h} = h^2 && \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{h} = h^2
\end{aligned}$$

であることを用いてグラム行列式を計算すると

$$G(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{h}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{h} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{h} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{h} \\ \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{h} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}h^2(H(x,y,z)h^2 - K(a,b,c;x,y,z)) = 0$$

となる．従って，関係式

$$H(x,y,z)h^2 = K(a,b,c;x,y,z)$$

を得る．三角形 ABC の面積を S とするとき，式 (5) より $H(x,y,z) = 16S^2$ であることに注意すると，

$$16S^2h^2 = K(a,b,c;x,y,z)$$

となる．四面体 OABC の体積は $V = \frac{1}{3}Sh$ なので，

$$144V^2 = K(a,b,c;x,y,z)$$

である．(証了)

このオイラーの公式のからみると，六斜術は，四面体の体積が 0 である特別の場合と解釈できる．ここまでくると，次のような疑問がわいてくる.「六斜 $abcxyz$ が実現可能であれば $K(a,b,c;x,y,z) \geqq 0$」の逆は成り立つのだろうか?．すなわち,「六斜 $abcxyz$ が実現可能であるための必要十分条件は何か?」である．

残念ながら,「$K(a,b,c;x,y,z) \geqq 0$」だけでは，六斜 $abcxyz$ が実現可能とは限らない．次のような反例がある．

[**反例**]　六斜 $abcxyz$ を，$a = x = 3, b = c = y = 1, z = 5$ とするとき，$K(a,b,c;x,y,z) > 0$ であるが六斜 $abcxyz$ は実現可能ではない．

この反例の六斜は，どの 4 面も，すなわち 4 つの三斜 abz, ayc, xbc, xyz のいずれも実現可能ではない．そこで，4 面の実現可能性と $K(a,b,c;x,y,z)$ の符号をさらに詳しく調べてみると，六斜に対し少なくとも 1 つの面が三角形をなしていると上述のような反例はでてこないことが分かる．そのことから六斜術とオイラーの公式の逆は次のような定理としてまとめられる．

定理 3.5　六斜 $abcxyz$ の一つの面 (例えば面 xbc) が三角形をなすと仮定するとき，次の (1)〜(3) が成り立つ．

(1)　$K(a,b,c;x,y,z) \geqq 0$ ならば六斜 $abcxyz$ は実現可能である．

(2)　$K(a,b,c;x,y,z) > 0$ ならば六斜 $abcxyz$ は四面体をなす．

(3)　$K(a,b,c;x,y,z) = 0$ ならば六斜 $abcxyz$ は平面的である．

(証明)　六斜 $abcxyz$ の面 xbc が三角形をなすと仮定する．このとき，$H(x,b,c) > 0$ である．以下 $K(a,b,c;x,y,z)$ を簡単のため K と表すことにする．K を変数 z に着目して整理すると，

$$K = -c^2z^4 + Bz^2 + C$$

は複 2 次式である．そこで，$z^2 = t$ とおけば 2 次式，

$$K = -c^2t^2 + Bt + C$$

である．この 2 次式の判別式 D を計算すると，実に見事に因数分解でき次の式が得られる．

$$D = B^2 + 4c^2C = H(x, b, c)H(a, y, c)$$

いま，$H(x, b, c)$ は正と仮定しているので，もう一方の $H(a, y, c)$ の符号で場合分けする．

[$H(a, y, c) < 0$ のとき]　これは六斜の 4 面のうち，1 つは三角形をなし，他の 1 つは実現不可能な場合である．従って六斜 $abcxyz$ は実現不可能である．このときの判別式 D は負となるので，すべての z に対して，$K < 0$ である．

[$H(a, y, c) > 0$ のとき]　これは六斜の 4 面のうち，2 面が三角形をなす場合である．定理 3.2(1) により，$K = 0$ を満たす正の実数 z に対して六斜 $abcxyz$ は平面的である．次に，K が z についての複 2 次式でかつ z^4 の係数が負であることから，z の関数としての K のグラフを考えることにより，$K > 0$ を満たす正の z の範囲は (定理 3.2 の z_1, z_2 を用いるとき) $z_1 < z < z_2$ である．従って，定理 3.2(2) により，$K > 0$ を満たす正の z に対して六斜 $abcxyz$ は四面体をなす．

[$H(a, y, c) = 0$ のとき]　これは六斜の 4 面のうち，1 つは三角形をなし，他の 1 つは直線的な場合である．4 点 OABC は図 6 のようになり，六斜 $abcxyz$ は平面的である．このときの判別式は $D = 0$ であり，すべての z に対して $K \leqq 0$ となる．定理 3.3 により $K = 0$ を満たす正の z に対して六斜 $abcxyz$ は平面的である．

これらすべての場合を総合することで定理 3.5 が証明できる．(証了)

4　トレミーの定理

トレミーの定理も六斜を使って表現することから始める．

「六斜 $abcxyz$ が平面的でその 4 頂点が同一円周上にあるとき，$\cdots$」といいかけてみると，あれ!?$\cdots$ と気がつくことがある．6 辺の中でどれが対角線なのかが分からない．可能性として a, x が対角線，b, y が対角線，c, z が対角線，の 3 つがある．

3 つの可能性があるので，「六斜 $abcxyz$ が平面的でその 4 頂点が同一円周上にあるとき，$-ax + by + cz = 0, ax - by + cz = 0, ax + by - cz = 0$ の 3 式のうちの 1 つが成り立つ」がより正確なトレミーの定理であることに気がつく．

さらに，定理 2.2 を参考にすることで条件を一本の式にまとめることができる．

$$L(a, b, c : x, y, z) = (ax + by + cz)(-ax + by + cz)(ax - by + cz)(ax + by - cz) \tag{8}$$

とおくとき，トレミーの定理 (1.2, 1.3, 1.4) は次のように六斜を使って表される．

定理 4.1　六斜 $abcxyz$ に対して次の (1)〜(3) が成り立つ．

(1)　六斜 $abcxyz$ が実現可能ならば，$L(a, b, c; x, y, z) \geqq 0$ である．

(2)　六斜 $abcxyz$ が四面体をなすならば，$L(a, b, c; x, y, z) > 0$ である．

(3)　六斜 $abcxyz$ が平面的で 4 頂点が同一円周上にあるならば，$L(a, b, c; x, y, z) = 0$ である．

さて，問題はこの逆である．残念ながら条件 $L(a,b,c;x,y,z) \geqq 0$ は弱すぎて，六斜 $abcxyz$ が実現可能かどうかを判定するような力は全くない．従って，トレミーの定理の逆を六斜を使って表す一つの方法は，大前提として六斜が実現可能であることを仮定することである．

系 4.1 六斜 $abcxyz$ が 4 点 OABC で実現可能であると仮定する．このとき，$L(a,b,c;x,y,z) = 0$ であれば，4 点 OABC が同一平面上にありかつ同一円周上にある．

もう一つの方法は六斜の実現可能性を六斜術の式を用いて表す方法である．

系 4.2 六斜 $abcxyz$ の少なくとも一つの面が三角形をなすと仮定する．このとき，
$K(a,b,c;x,y,z) \geqq 0, \quad L(a,b,c;x,y,z) = 0$ の 2 式が成り立てば，4 点 OABC が同一平面上にありかつ同一円周上にある．

どちらにしても，トレミーの定理の逆を述べようとすると，六斜の実現可能性について触れなければならない．その点において六斜術はトレミーの定理に深くかかわっていることになる．次節ではより明瞭に 2 つの式が等号で結ばれていることを紹介する．

5 六斜術とトレミーの定理の関係

最後は本題である六斜術とトレミーの定理の関係である．それはクレルレの公式と呼ばれているもので，六斜術の式 $K(a,b,c;x,y,z)$ とトレミーの式 $L(a,b,c;x,y,z)$ が等号で結ばれる．

定理 5.1 (クレルレの公式 [2, pp.143–144]) 六斜 $abcxyz$ が 4 点 OABC で実現可能で，4 点 OABC を通る球の半径を R とする．このとき，

$$4K(a,b,c;x,y,z)R^2 = L(a,b,c;x,y,z) \tag{9}$$

である．

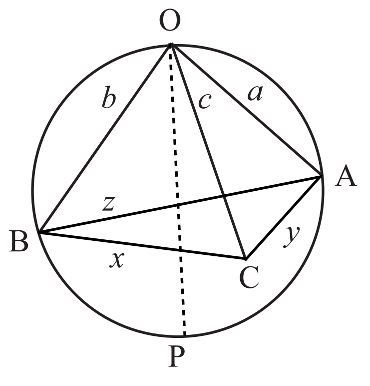

図 8: クレルレの公式

(証明)　球の直径を OP とし，空間内の 4 つのベクトルを $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}, \boldsymbol{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおくとき，4 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{p}$ は一次従属である．従って，

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a^2 && \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a^2+b^2-z^2)/2\\
&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = (a^2+c^2-y^2)/2 && \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p} = a^2\\
&\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = b^2 && \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = (b^2+c^2-x^2)/2\\
&\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{p} = b^2 && \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} = c^2\\
&\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{p} = c^2 && \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p} = 4R^2
\end{aligned}
$$

となる．このときのグラム行列式を計算すると，

$$G(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{p}) = K(a, b, c; x, y, z)R^2 - \frac{1}{4}L(a, b, c; x, y, z) = 0$$

となる．(証了)

ここで，四面体 OABC(4 点 OABC の凸包) の体積を V として，式 (7) を上の式に代入すると，

$$L(a, b, c; x, y, z) = 576V^2R^2 \tag{10}$$

が得られる．従って，トレミーの式の値は，四面体の体積 V とその外接円の半径 R で決まることが分かる．

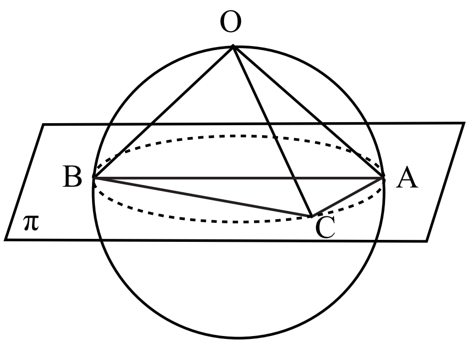

図 9: 四面体と外接球

ここで，式 (10) の意味について考えてみる．図 9 のように，四面体 OABC があり，その外接球の半径を R，3 点 A,B,C で決まる平面を π，外接球と π の交わりを円 K とする．3 点 A,B,C と外接球は動かさず，点 O を外接球の表面にそって円 K 上の点に向かって動かすことにする．このとき，式 (10) の右辺の R は一定で，体積 V は点 O が円 K 上の点に向かって動くのにつれて 0 に近づく．従って，式 (10) の左辺の $L(a, b, c; x, y, z)$ は 0 に近づくことになる．このことより，円 K の近傍で式 $L(a, b, c; x, y, z)$ は 0 に近い値をとることが分かる．

次に，4 点 O,A,B,C が同一平面上にある場合について考える．すなわち式 (9) の左辺の $K(a, b, c; x, y, z) = 0$ の場合である．もう一方の $L(a, b, c; x, y, z)$ が 0 かどうかで場合分けする．

[$L(a, b, c; x, y, z) = 0$ のとき]　このとき式 (9) は

$$0 \cdot R^2 = 0$$

となり，R は不定となる．これは，4 点 O,A,B,C を通る任意の半径の球が存在することを意味し，図 10 のように 4 点 O,A,B,C が同一円周上にあるときである．

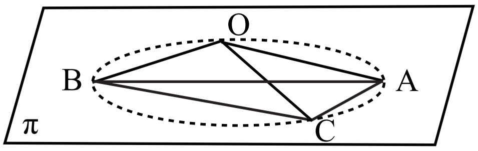

図 10: $L(a, b, c; x, y, z) = 0$

[$L(a, b, c; x, y, z) \neq 0$ のとき]　このとき式 (9) は

$$0 \cdot R^2 \neq 0$$

となり，R は不能となる．これは，4 点 O,A,B,C を通る球が存在しないことを意味し，図 11 のように 4 点 O,A,B,C が同一円周上にないときである．

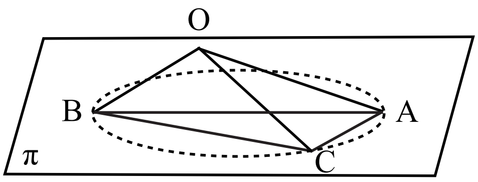

図 11: $L(a, b, c; x, y, z) \neq 0$

六斜術とトレミーの定理の関係についての考察は以上であるが，六斜術とクレルレの公式について詳しく調べることにより，トレミーの定理とはいったい何なのかについても明らかにすることができたのではないかと思っている．

参考文献

[1] 岩田至康編, 幾何学大辞典 第 1 巻 基本定理と問題 (平面), 槇書店, 1971.

[2] 岩田至康編, 幾何学大辞典 第 2 巻 基本定理と問題 (空間), 槇書店, 1974.

[3] 佐竹一郎, 線型代数学, 裳華房, 1958.

[4] 一松信, 現代に活かす初等幾何入門, 岩波書店, 2003.

[5] Peter Frankl・前原潤, やさしい幾何学問題ゼミナール, 共立出版, 1992.