大西佐兵衛と小嶌又兵衛の算額

平田浩一 [*]・河村泰之 [*]

The Problems of Sahei Oonishi and Matabei Kojima in their Sangaku Tablets

Koichi HIRATA [*], Yasuyuki KAWAMURA [*]

Abstract: In the Isaniwa Shrine at Matsuyama, there are many sangaku tablets which mathematicians dedicated to the shrine in the 19th century. In this article we analyze the problems of Sahei Oonishi and Matabei Kojima in their sangaku tablets. The tablets were hung in 1803 and 1812 at the shrine respectively.

Keywords: Sangaku, Wasan, Japanese Mathematics, Isaniwa Shrine.

1 はじめに

算額は数学の問いと答えを額にして神社仏閣に奉納したもので、江戸時代から明治にかけて算額の奉納がさかんに行われていて、現在もそのような算額が国内に約 900 面ほど残されている。和算を学んだ人々が「自分の学力の向上」や「一門の繁栄を祈願」して奉納したものである。愛媛県松山市道後の伊佐爾波神社には 22 面の算額が残されている [3]。伊佐爾波神社の算額については、論文 [5] において花山金次郎・吉田茂兵衛・関家喜多次の算額を、また論文 [6] において山崎喜右衛門・栗林佐太郎の算額を現代数学の観点から取り上げ、その問題の現代数学的考察を行った。この小論では、伊佐爾波神社に 1803 年に奉納された大西佐兵衛の算額と 1812 年に奉納された小嶌又兵衛の算額について、その数学的な内容を現代数学の観点から解析し、当時の解法と比較することを目的とする。

2 大西佐兵衛の算額

大西佐兵衛の算額（図 1、横 76.3cm 縦 107.2cm）は享和 3 年（1803 年）に伊佐爾波神社に奉納されている。大西は松山藩家老水野家の用人を務めていて、和算は江戸で関流和算家丸山良玄に学んでいる。大西の著した和算書『雑題』30 冊は当時の松山では秘伝の書として弟子たちの間で写しあったといわれていて、現在は愛媛県立図書館に蔵書されている。

【問題 1】

図のように、孤環減球に中球 2 個と小球 1 個がある。中球、小球の直径の長さがそれぞれ 3 寸、2 寸のとき、孤環減球から中球 2 個と小球 1 個を除いた体積（外積）を求めよ。

[*]愛媛大学教育学部 Faculty of Education, Ehime University

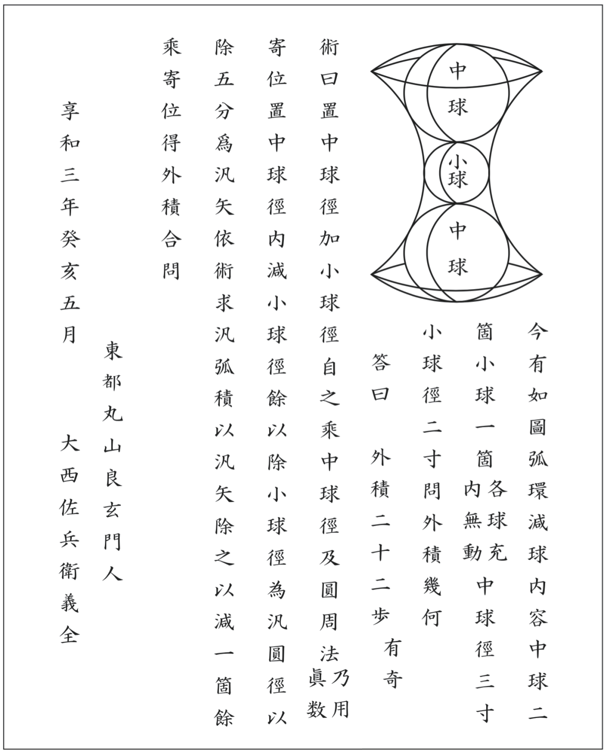


図 1: 大西佐兵衛の算額

【現代解】

大西の算額の現代解は [1], [2], [3], [4] で紹介されている。その解法はいずれも中球と小球の直径を 3 寸と 2 寸に固定して外積を数値解として求めたものである。この小論では和算家の解答に近づけるため、中球の半径を a、小球の半径を b とおいて、外積を a, b の式として表すことにする。

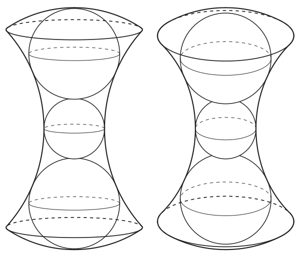


図 2: 孤環減球

この問題の本質は孤環減球の体積を求めることである。図 2 は孤環減球を視点の位置を変えて図にしたものである。孤環減球は図 3(1) のように、x 軸を回転軸にして 2 円 O, P と x 軸とで囲まれた領域（灰色部分）を回転させてできる回転体である。

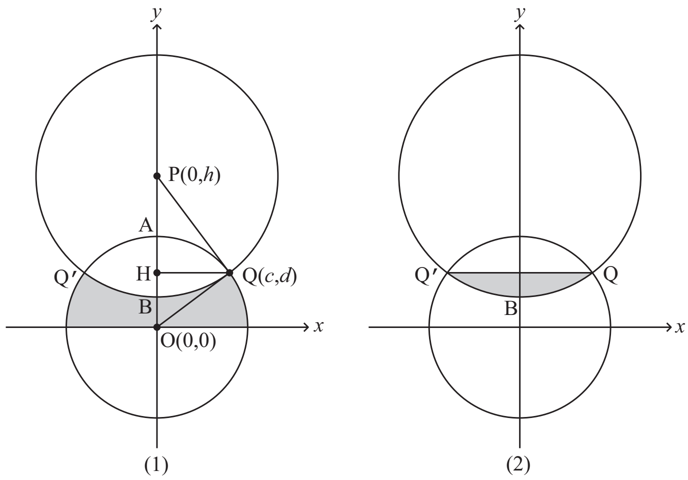


図 3: 回転体としての孤環減球

2 円 O, P の方程式を

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{1}$$

$$x^2 + (y - h)^2 = R^2 \tag{2}$$

とおく。ただし、$0 < R < h < R + r$ である。次に 2 円の交点 $Q(c, d)$ の座標を求めよう。連立方程式 (1), (2) を解けばよいのだが、実際計算してみると思いのほか式の整理に手間取る。次のように幾何学的に処理した方がエレガントである。$\triangle POQ = \dfrac{ch}{2}$ とヘロンの公式で求めた $\triangle POQ$ の面積を比較すると、

$$c = 2\frac{\sqrt{s(s-h)(s-r)(s-R)}}{h} \qquad (s = \frac{h+r+R}{2}) \tag{3}$$

である。また、$\triangle POQ$ に余弦定理を用いると

$$R^2 = h^2 + r^2 - 2hr\cos\angle POQ = h^2 + r^2 - 2hd$$

となるので、

$$d = \frac{h^2 + r^2 - R^2}{2h} \tag{4}$$

である。

孤環減球の体積を V_1 とすると、それは半径 r の球 O の体積 $\frac{4}{3}\pi r^3$ から弧 Q′AQ と弧 Q′BQ で囲まれる部分を x 軸の周りに回転させてできる回転体の体積 V_2 を引いたものである。

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 - V_2 \tag{5}$$

弧 Q′AQ と弧 Q′BQ の式はそれぞれ

$$y_1 = \sqrt{r^2 - x^2}, \qquad y_2 = h - \sqrt{R^2 - x^2}$$

なので、

$$V_2 = \pi \int_{-c}^{c} (y_1^2 - y_2^2)\, dx = \pi \int_{-c}^{c} (r^2 - R^2 - h^2 + 2h\sqrt{R^2 - x^2})\, dx$$

この式に、(4) より得られる $r^2 - R^2 = 2dh - h^2$ を代入すると

$$V_2 = 2\pi h \int_{-c}^{c} \{d - (h - \sqrt{R^2 - x^2})\}\, dx = 2\pi h \int_{-c}^{c} (d - y_2)\, dx$$

となる。この式の最後の積分は図 3 (2) の灰色の弓形の面積 S に等しいので、

$$V_2 = 2\pi h S \tag{6}$$

となり、従って

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 - 2\pi h S \tag{7}$$

である。これが孤環減球の体積公式である。算額では面積 S を弧積と呼んでいる。

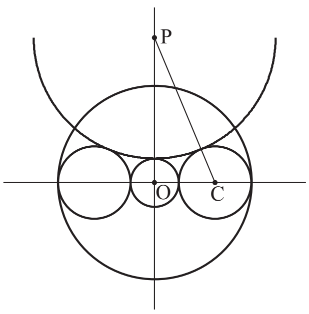


図 4: 中球と小球が内接

算額の問題に戻り、中球と小球が孤環減球に内接している条件を加えて、孤環減球の体積の式を書き換えてみることにしよう。図 4 は 3 球が内接するときの切り口である。中球の半径を a、小球の半径を b、中球の中心を C として、△POC に三平方の定理を用いると、$(b+R)^2+(a+b)^2 = (a+R)^2$ なのでこれを解いて、

$$R = \frac{(a+b)b}{a-b} \tag{8}$$

となる。また h, r については、

$$h = b + R = \frac{2ab}{a-b}, \qquad r = 2a + b \tag{9}$$

である。

そこで、孤環減球の体積 V_1 は式 (7) に (8), (9) を代入することで、

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi(2a+b)^3 - \frac{4\pi ab}{a-b} S \tag{10}$$

となる。

この V_1 から中球 2 個と小球 1 個を除いた外積 V は

$$V = V_1 - 2 \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 - \frac{4}{3}\pi b^3$$

$$V = 8\pi a(a+b)^2 - \frac{4\pi ab}{a-b}S \tag{11}$$

となり、これが S を使って表した算額の問題の解で、実に簡潔な式である。

最後に弧積 S の計算であるが、これが厄介で、

$$S = 2\int_{h-d}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

に 4 節の補助定理 1 を用いて計算することで

$$\begin{aligned} S &= R^2 \cos^{-1} \frac{h-d}{R} - (h-d)\sqrt{R^2 - (h-d)^2} \\ &= \frac{(a+b)^2 b^2}{(a-b)^2} \cos^{-1} \frac{a(2b-a)}{b^2} - \frac{a(a+b)^2(2b-a)\sqrt{b^2 + 2ab - a^2}}{(a-b)b^2} \end{aligned}$$

となる。これを (11) に代入しても

$$V = 4\pi a(a+b)^2 \left\{ 2 + \frac{a(2b-a)\sqrt{b^2+2ab-a^2}}{(a-b)^2 b} - \frac{b^3}{(a-b)^3} \cos^{-1} \frac{a(2b-a)}{b^2} \right\} \tag{12}$$

のような、長くてよく分からない式となってしまう。

最後に具体的な数値として、$a = \dfrac{3}{2},\ b = 1$ を代入すると、

$$V = 75\pi + \frac{225\sqrt{7}\pi}{4} - 300\pi \cos^{-1} \frac{3}{4}$$

であり、その近似値は $V = 22.0013176\cdots$ である。

【算額の解】

算額の答曰には「外積二十二歩有奇」と書かれている。これは、外積は 22 歩に端数が少しつくことを意味している。また術曰には式 (11) と同値な式

$$V = 8\pi a(a+b)^2 \left\{ 1 - \frac{bS}{2(a-b)(a+b)^2} \right\}$$

が書かれていて、現代解で求めたものと一致する。

現代解では弧積 S の計算に逆三角関数を用いたが、和算では弧積の計算には次の級数展開が用いられている。

$$S = 2\int_a^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{4p}{3}\left(1 + \frac{1}{5}t + \frac{1}{5}\cdot\frac{6}{7}t^2 + \frac{1}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}t^3 + \frac{1}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{11}t^4 + \cdots \right)$$

ここで、$p = (r-a)\sqrt{r^2 - a^2},\quad t = \dfrac{r-a}{2r}$ である。

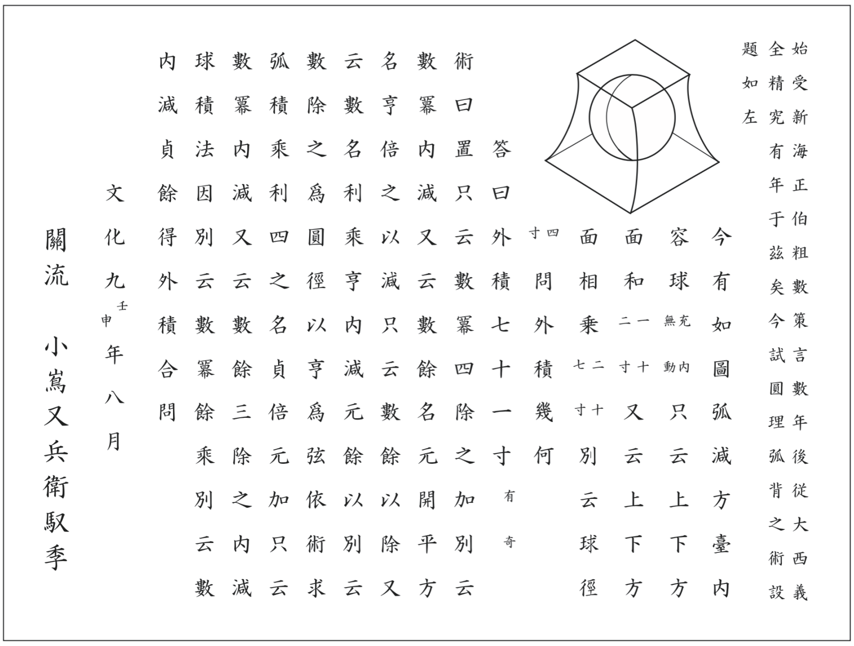


図 5: 小嶌又兵衛の算額

3　小嶌又兵衛の算額

小嶌又兵衛の算額（図 5、横 105.1cm 縦 74.7cm）は文化 9 年（1812 年）に伊佐爾波神社に奉納されている。小嶌は和算を新海正伯に学び、その後大西佐兵衛の門下に入っている。大西に倣い和算書『容術』30 冊（愛媛県立図書館蔵）を著していて、大西門下で首席と伝えられている。

【問題 2】

図のように、孤減方台に球を内接させる。方台の上面の 1 辺と下面の 1 辺の長さの和が 12 寸、積が 27 寸である。球の直径の長さが 4 寸であるとき、方台から球を除いた体積（外積）を求めよ。

【現代解】

小嶌の算額の現代解は [1], [4] で紹介されている、その解法は共に具体的な数値を用いて外積を求めたものである。この問題もより一般的な方法で解くことにする。

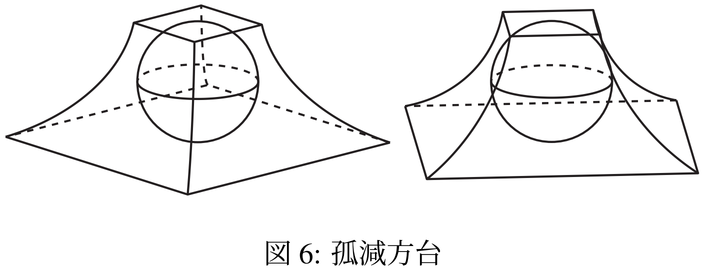


図 6: 孤減方台

孤減方台は、四角錐台のように上面と下面はともに正方形であるが、側面は円柱でくり抜かれた 4 つの曲面からなる図形である。図 6 は視点を変えて孤減方台を図にしたものである。

孤減方台に次のように座標軸をいれる。下面の中心 O と上面の中心 H を通る直線を z 軸とし、O を原点とする。下面は平面 $z = 0$ に含まれ、方台の高さを h とするとき上面は平面 $z = h$ に含まれる。x 軸、 y 軸は下面の正方形の辺と平行になるようにとる。

図 7 は孤減方台を、xz-平面で切った切り口 ABCD である。方台の切り口の右にある円 P は、方台の側面をくり抜く円柱の xz-平面による切り口である。円 P の方程式を

$$(x - p)^2 + (z - q)^2 = r^2 \tag{13}$$

とするとき、h, p, q, r について、次の関係式が成り立つ。

$$0 < h < q < r < p$$

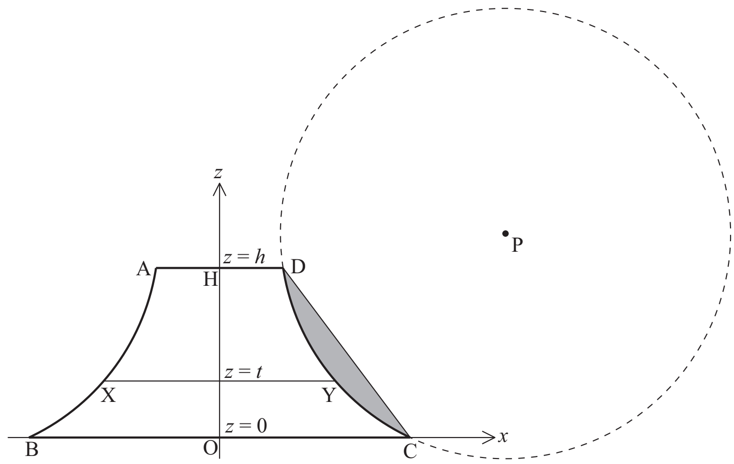


図 7: 孤減方台の切り口

この問題の本質は孤減方台の体積を求めることである。孤減方台を平面 $z = t$ $(0 \leq t \leq h)$ で切った切り口は正方形で、その 1 辺の長さは図 7 での XY の長さに等しい。その面積は $S(z) = \mathrm{XY}^2 = 4\left(p - \sqrt{r^2 - (z - q)^2}\right)^2$ なので、孤減方台の体積 V_1 は定積分

$$V_1 = \int_0^h S(z)dz$$

を計算することで得られる。

体積 V_1 の計算方法であるが、大西佐兵衛の問題の解き方に倣って、図 7 に灰色で示した弓形 DYC の面積（弧積）を S_1 とおき、V_1 を S_1 で表すことを考えてみよう。

弧 DYC の式を

$$x = p - \sqrt{r^2 - (z - q)^2} = f(z) \tag{14}$$

とおく。2 点 D、C の xz-座標は

$$f(h) = a, \quad f(0) = b \tag{15}$$

とおくとき D(a, h)、C$(b, 0)$ となる。そこで直線 DC の式を

$$x = b - \frac{b-a}{h}z = g(z) \tag{16}$$

とおく。このとき

$$V_1 = 4\int_0^h \{f(z)\}^2\,dz, \qquad S_1 = \int_0^h \{g(z) - f(z)\}\,dz \tag{17}$$

である。

そこで、

$$\{f(z)\}^2 = -2p\sqrt{r^2 - (z-q)^2} \ + \ (\cdots z \text{ の 2 次式} \cdots)$$

と表されることと $g(z)$ が z の 1 次式であることにより

$$\{f(z)\}^2 = -2p\{g(z) - f(z)\} \ + \ (\cdots z \text{ の 2 次式} \cdots)$$

と表されるはずである。実際計算してみると

$$\{f(z)\}^2 = -2p\{g(z) - f(z)\} - z^2 + \frac{2}{h}(ap - bp + hq)z + 2bp - p^2 - q^2 + r^2$$

となる。この両辺を積分することで

$$\int_0^h \{f(z)\}^2\,dz = -2p\int_0^h \{g(z) - f(z)\}\,dz + \int_0^h \{-z^2 + \frac{2}{h}(ap - bp + hq)z + 2bp - p^2 - q^2 + r^2\}\,dz$$

$$\frac{V_1}{4} = -2pS_1 + \left[-\frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{h}(ap - bp + hq)z^2 + (2bp - p^2 - q^2 + r^2)z\right]_0^h$$

$$\frac{V_1}{4} = -2pS_1 - \frac{h^3}{3} - h(p^2 - ap - bp + q^2 - hq - r^2)$$

従って

$$V_1 = -8pS_1 - \frac{4h^3}{3} - 4h(p^2 - ap - bp + q^2 - hq - r^2) \tag{18}$$

となる。

次に式 (15) の条件を整理すると

$$p^2 - 2ap + q^2 - 2hq - r^2 = -(a^2 + h^2) \tag{19}$$

$$p^2 - 2bp + q^2 - r^2 = -b^2 \tag{20}$$

となるので、この 2 式を加えることで

$$2(p^2 - ap - bp + q^2 - hq - r^2) = -(a^2 + b^2 + h^2)$$

となり、これを式 (18) に代入して

$$V_1 = 2h\left(a^2 + b^2 + \frac{h^2}{3}\right) - 8pS_1 \tag{21}$$

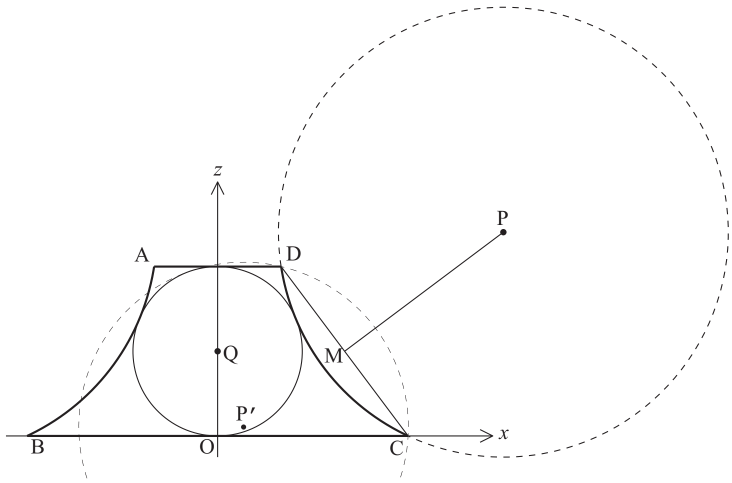


図 8: 小嶌の孤減方台

が得られる。これが孤減方台の体積公式である。

小嶌が問題にしている孤減方台は、図 8 のように内部に球 Q があり上面下面に接しかつ 4 つの側面にも接しているものである。この条件を加えて孤減方台の体積の式を書き換えてみることにしよう。球 Q の半径は $\frac{h}{2}$ で、$PQ = r + \frac{h}{2}$ となるので

$$p^2 + \left(q - \frac{h}{2}\right)^2 = \left(r + \frac{h}{2}\right)^2$$

$$p^2 + q^2 - hq - r^2 - hr = 0 \tag{22}$$

が成り立つ。

ここで、(19) − (20) と (19) + (20) − 2 × (22) を計算することで

$$q = \frac{a^2 - b^2 + h^2 - 2ap + 2bp}{2h} \tag{23}$$

$$r = \frac{-a^2 - b^2 - h^2 + 2ap + 2bp}{2h} \tag{24}$$

が得られる。この q, r を (20) に代入することで p の 2 次方程式

$$(4ab - h^2)p^2 - 2ab(a + b)p + a^2b^2 = 0$$

が得られる。この 2 次方程式は正の 2 実解

$$p = \frac{ab}{4ab - h^2}\{a + b \pm \sqrt{(b - a)^2 + h^2}\}$$

を持つ。この 2 解は「2 点 C, D を通り円 Q に接する円の中心 P の x 座標」を求めたものであり、p の小さい方の解は図 8 の円 P′ に相当するので題意に適していない。また、線分 CD の長さを c とするとき、

$$c = \sqrt{(b - a)^2 + h^2} \tag{25}$$

となり、

$$p = \frac{ab}{4ab - h^2}(a + b + c)$$

である。ここで、$(a + b + c)(a + b - c) = 4ab - h^2$ であることに注意すると

$$p = \frac{ab}{a + b - c} \tag{26}$$

である。従って (21) に代入することで、小嶌の問題の孤減方台の体積は

$$V_1 = 2h\left(a^2 + b^2 + \frac{h^2}{3}\right) - \frac{8ab}{a + b - c}S_1 \tag{27}$$

となる。従って、孤減方台の体積 V_1 から球 Q の体積 $\frac{1}{6}\pi h^3$ を引くことで、求める外積 V は

$$V = 2h\left(a^2 + b^2 + \frac{h^2}{3}\right) - \frac{8ab}{a + b - c}S_1 - \frac{1}{6}\pi h^3 \tag{28}$$

となる。

この後は弧積 S_1 を求めればよいのだが、さすがにそれを a, b, h の数式で簡潔に表すのは困難である。そこでここから先は算額に述べられている具体的な数値を使うことにする。「方台の上面の 1 辺と下面の 1 辺の長さの和が 12 寸、積が 27 寸、球の直径の長さが 4 寸」とあるので、$2a + 2b = 12,\ 4ab = 27,\ h = 4$ より

$$a = \frac{3}{2}, \qquad b = \frac{9}{2}, \qquad h = 4, \qquad c = 5$$

である。式 (26), (23), (24) より

$$p = \frac{27}{4}, \qquad q = \frac{77}{16}, \qquad r = \frac{85}{16}$$

となる。また、線分 CD の中点を M とし、MP $= k$ とおくとき

$$k = \frac{75}{16}$$

である。

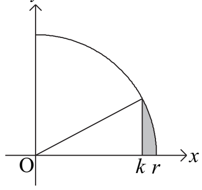


図 9: S_1 の面積計算

従って弧積 S_1 は図 9 の灰色部分の面積を 2 倍にしたものなので、次の式で得られ、補助定理 1 を用いて計算すると

$$S_1 = 2\int_k^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = r^2\cos^{-1}\frac{k}{r} - k\sqrt{r^2 - k^2} = \frac{7225}{256}\cos^{-1}\frac{15}{17} - \frac{375}{32} \tag{29}$$

となり、その近似値は $S_1 = 2.109147\cdots$ となる。

これらを (28) に代入することで

$$V = \frac{41063}{48} - \frac{195075}{128}\cos^{-1}\frac{15}{17} - \frac{32\pi}{3} \tag{30}$$

となる。この近似値は $V = 75.262396\cdots$ である。

【算額の解】

算額の術曰には簡略された式が書かれているが、小嶌が著した『容術』には詳しい計算方法が述べられており、式 (28) と同じものを得ている。しかしながら『容術』での計算をよく見ると、小嶌はこの弧積 S_1 の級数による計算を間違えて、$S_1 = 2.18658874049\cdots$ としてしまったため、答が「七十一寸有奇」となってしまった。数式としては正確に解を求めているのに、数値で計算間違いをしたのは残念なことである。

また、式 (28) は c の中も含め a と b の基本対称式である $a+b$ と ab で表されている。式としてはここでは確認していないが、S_1 は r と c で決まるものなので、S_1 も a, b の基本対称式で表されるはずである。その対称性を意識した上で「方台の上面の 1 辺と下面の 1 辺の長さの和が 12 寸、積が 27 寸」という出題をしたものと思われる。

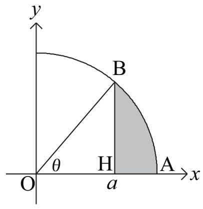
4　補助定理

補助定理 1 次の公式が成り立つ。

$$\int_a^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(r^2\cos^{-1}\frac{a}{r} - a\sqrt{r^2 - a^2}\right)$$

ただし、$0 < a < r$ とする。

（証明）　図の灰色の部分の面積を求める定積分である。従って、扇型 OAB と △OHB の面積を求めればよい。



扇型 OAB の中心角を θ とすると $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ であり、その面積 S_1 は

$$S_1 = \frac{r^2\theta}{2} = \frac{r^2}{2}\cos^{-1}\frac{a}{r}$$

である。また、△OHB の面積 S_2 は、$\mathrm{OH} = a,\ \mathrm{BH} = \sqrt{r^2 - a^2}$ により、

$$S_2 = \frac{1}{2}a\sqrt{r^2 - a^2}$$

である。従って、

$$\int_a^r \sqrt{r^2 - x^2}dx = S_1 - S_2 = \frac{1}{2}\left(r^2 \cos^{-1}\frac{a}{r} - a\sqrt{r^2 - a^2}\right)$$

である。

5　まとめ

筆者はこれまで、愛媛県内の算額の歴史及び数学的内容についての調査研究活動を愛媛和算研究会（会長 : 浅山秀博、会員 : 45 名）とともに続けてきた。中でも、松山市道後の伊佐爾波神社に奉納された算額には当時の和算のレベルの高さを示す難解な問題が数多く含まれているため、ここ数年は、これら算額の数学的内容についての研究を行ってきた。

この論文では、そうした研究の中から大西佐兵衛と小嶌又兵衛の 2 つの算額問題を取り上げ、極力文字式を使い和算家の結果に近づけるように現代解を構成してみた。その結果、これまでの研究 [1] などよりも見通しよく現代解をまとめることができた。立体図形の体積計算において一番厄介な部分を、弓形の面積（弧積）に帰着させ、最後に弧積を級数展開を利用して求めるという和算家の知恵を知ることができた。さらには、和算家の数式を処理する計算力が並はずれたものであったこともこの研究を通して実感した。

最後に、本研究は「JSPS 科研費 24501058」の研究助成を受けて行われた研究成果であること、当時の和算家の計算方法については浅山秀博先生に資料提供いただいたことに感謝します。

参考文献

[1] 相原要之進, 伊豫道後伊佐爾波神社の算額に就いて, 東京物理学校雑誌, 第 583 号, 178–182, 1940.

[2] 愛媛和算研究会, 愛媛の算額 〜見学のしおり〜, 2003.

[3] 伊佐爾波神社, 伊佐爾波神社の算額, 2005.

[4] 河村泰之, 伊佐爾波神社の算額 〜大西佐兵衛（義全）と小嶌又兵衛（馭季）の算額〜, 愛媛の算額 DVD, 愛媛和算研究会, 2012.

[5] 平田浩一, 伊佐爾波神社の算額にみる江戸末期の和算, 愛媛大学教育学部紀要, 第 60 巻, 195–206, 2013.

[6] 平田浩一・河村泰之, 山崎喜右衛門と栗林佐太郎の算額, 日本数学教育学会 高専・大学部会論文誌, 第 21 巻第 1 号, 1–14, 2015.