山崎喜右衛門と栗林佐太郎の算額

平田浩一 * ・ 河村泰之 *

The Problems of Kiemon Yamasaki and Sataro Kuribayashi in their Sangaku Tablets

Koichi HIRATA *, Yasuyuki KAWAMURA *

Abstract: In the Isaniwa Shrine at Matsuyama, there are many Sangaku which mathematicians dedicated to the shrine in the middle of the 19th century. In this article we analyze the problems of Kiemon Yamasaki and Sataro Kuribayashi in their sangaku tablets. The tablets were hung in 1850 at the Isaniwa Shrine.

Keywords: Sangaku, Wasan, Japanese Mathematics, Isaniwa Shrine.

1　はじめに

算額は数学の問いと答えを額にして神社仏閣に奉納したもので、江戸時代から明治にかけて算額の奉納がさかんに行われていた。和算を学んだ人々が「自分の学力の向上」や「一門の繁栄を祈願」して奉納したものであるが、その奉納の習慣が和算の発展にも大きく寄与した。そのような算額が国内に現在も約 900 面ほど残されている。愛媛県松山市道後の伊佐爾波神社には 22 面の算額が残されている [5]。伊佐爾波神社の算額については、論文 [6] において花山金次郎・吉田茂兵衛・関家喜多次の算額を現代数学の観点から取り上げ、その問題の難しさについて考察を行った。また、[7] においても大西佐兵衛・山崎喜右衛門・吉田茂兵衛の算額について一般向けにその内容を簡単に紹介した。この小論では、1850 年に伊佐爾波神社に奉納された山崎喜右衛門と栗林佐太郎の算額について、その数学的な内容を現代数学の観点から解析することを目的とする。また、その過程で当時の和算家がよく用いていた数学公式についても紹介する。

2　山崎喜右衛門の算額の右の問題

山崎喜右衛門の算額（図 1、横 110.7cm 縦 86.4cm）は 嘉永 3 年（1850 年）に伊佐爾波神社に奉納されている。山崎は、和算を小嶌又兵衛に学び、その後江戸を目指しながら徳島、大阪、京都の和算の達人を訪ね和算を学んだ。江戸では『続神壁算法』を著した藤田嘉言の子である藤田貞升に入門して関流の和算を学んでいる。山崎の算額については [2] [3] [4] [5] で紹介されている。この算額には問題が 2 つあり、最初に右側の問題から取り上げる。

*愛媛大学教育学部　Faculty of Education, Ehime University

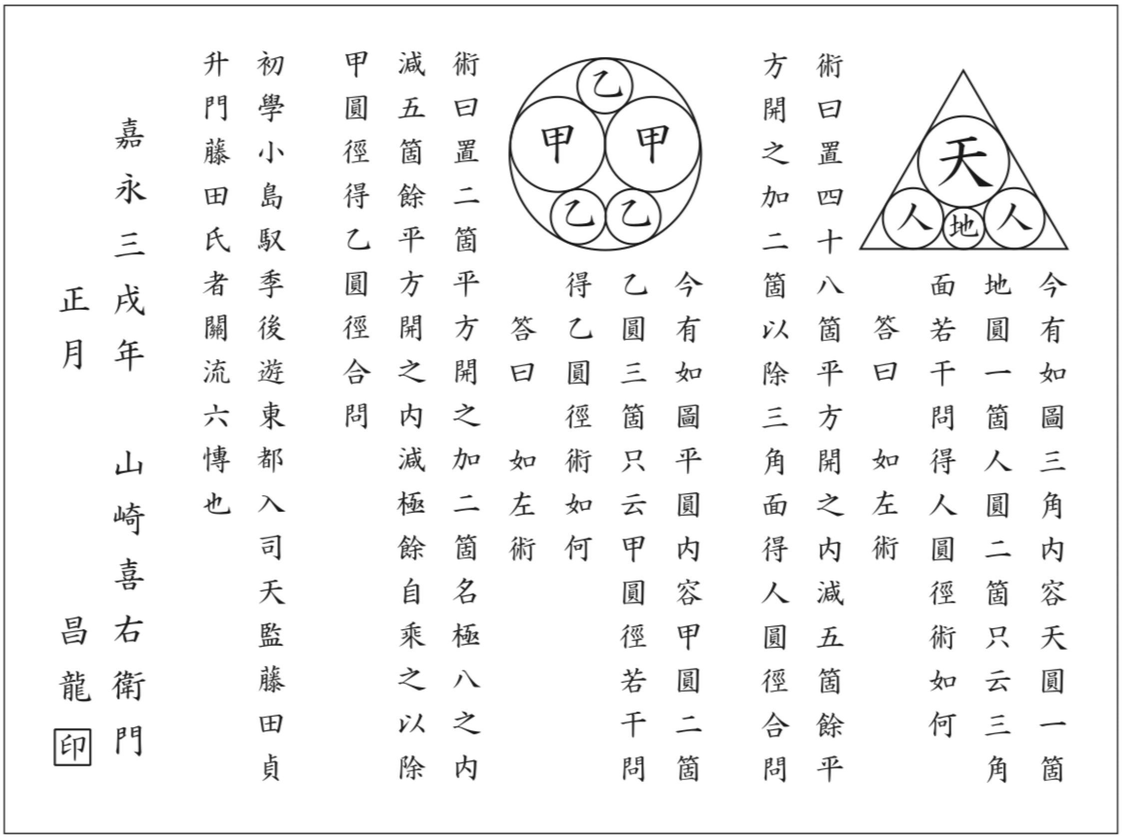


図 1: 山崎喜右衛門の算額

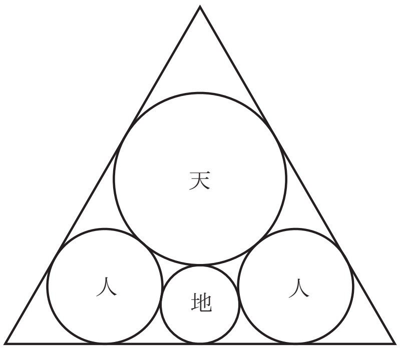


図 2: 問題 1

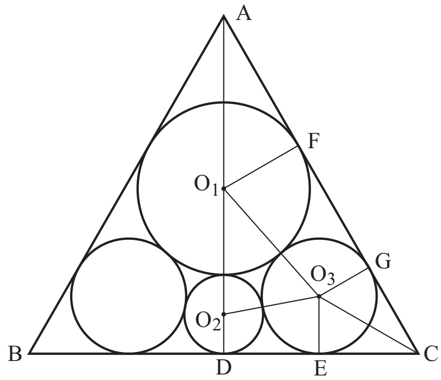


図 3: 問題 1 の解法

【問題 1】

図 2 のように、正三角形内に天円 1 個、地円 1 個、人円 2 個がある。正三角形の 1 辺の長さが与えられたとき、人円の直径を求めよ。

【現代解】

この問題は 4 次方程式に帰着する問題である。論文 [2] では Ferrari の公式でそれを解いている。また、[5] では巧妙な方法で因数分解し答えを導いている。これから紹介する方法は、高校生でも理解しやすい係数比較による解法である。

図 3 のように、正三角形 ABC の 1 辺の長さを a とし、天円、地円、人円それぞれの中心を $\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2, \mathrm{O}_3$、半径を r_1, r_2, r_3 とする。辺 BC と地円、右側人円との接点をそれぞれ D, E とする。天円、人円と辺 AC との接点をそれぞれ F, G とする。

補助定理 1 より $\mathrm{DE} = 2\sqrt{r_2 r_3}$ である。また、$\mathrm{EC} = \sqrt{3}r_3$、$\mathrm{DC} = \frac{a}{2}$ であることにより、

$$4\sqrt{r_2 r_3} + 2\sqrt{3}r_3 = a \tag{1}$$

を得る。また、$\mathrm{AO}_1 = 2r_1$、$\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2 = r_1 + r_2$、$\mathrm{O}_2\mathrm{D} = r_2$、$\mathrm{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ により、

$$6r_1 + 4r_2 = \sqrt{3}a \tag{2}$$

である。さらに、補助定理 2 により

$$r_1(r_3 - r_2) = r_2^2 \tag{3}$$

となるので、これら 3 式の連立方程式を解けばよい。

そこで、$a = 2tr_3$、$r_1 = xr_3$、$\sqrt{r_2} = y\sqrt{r_3}$ を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} &2y + \sqrt{3} = t \\ &3x + 2y^2 = \sqrt{3}t \\ &x(1 - y^2) = y^4 \end{aligned} \tag{4}$$

となり、この 3 式から x, y を消去して整理すると、4 次方程式

$$t^4 + 2t^2 - 32\sqrt{3}t + 33 = 0 \tag{5}$$

を得る。この式の左辺は

$$t^4 + 2t^2 - 32\sqrt{3}t + 33 = (t^2 + 4t + 9 + 4\sqrt{3})(t^2 - 4t + 9 - 4\sqrt{3}) \tag{6}$$

と因数分解できる。因数分解の方法としては

$$t^4 + 2t^2 - 32\sqrt{3}t + 33 = (t^2 + p)^2 - (qt + r)^2$$

とおいて係数比較するとよい。

2 次方程式 $t^2 + 4t + 9 + 4\sqrt{3} = 0$ は実解を持たないので、もう一方の $t^2 - 4t + 9 - 4\sqrt{3} = 0$ を解くことで、

$$t = 2 + \sqrt{4\sqrt{3} - 5}, \quad 2 - \sqrt{4\sqrt{3} - 5}$$

を得る。これより、人円の半径 r_3 は、

$$r_3 = \frac{a}{2\left(2+\sqrt{4\sqrt{3}-5}\right)},\quad \frac{a}{2\left(2-\sqrt{4\sqrt{3}-5}\right)}$$

となるが、後者はおよそ 0.8a となり、半径が大きすぎて三角形におさまらないので不適。従って、

$$r_3 = \frac{a}{2\left(2+\sqrt{4\sqrt{3}-5}\right)} \tag{7}$$

即ち

$$\text{人円直径} = 2r_3 = \frac{a}{2+\sqrt{4\sqrt{3}-5}} \tag{8}$$

となる。

【算額の解】

算額の術曰には、「48 を平方に開き、5 を引いて平方に開き、2 を加え、これで正三角形の一辺を除すと、人円径を得る」とあり (8) 式と一致する。

補助定理 1　2 円 O_1、O_2 は互いに外接し、直線 l に 2 点 A、B で接している。円 O_1、O_2 の半径をそれぞれ r_1、r_2 とするとき、

$$AB = 2\sqrt{r_1 r_2}$$

である。

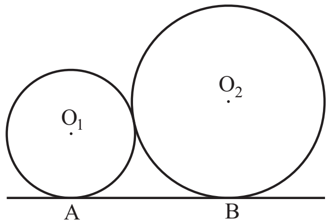


図 4: 補助定理 1

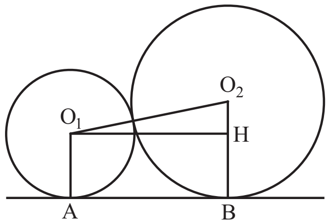


図 5: 補助定理 1 の証明

（証明）　この補助定理は『算法助術』 [1] の公式 40 である。O_1 から O_2B に下ろした垂線の足を H とする。$\triangle O_2O_1H$ に三平方の定理を用いると、

$$AB = O_1H = \sqrt{{O_1O_2}^2 - O_2H^2} = \sqrt{(r_1+r_2)^2 - (r_2-r_1)^2} = 2\sqrt{r_1 r_2} \tag{9}$$

が得られる。

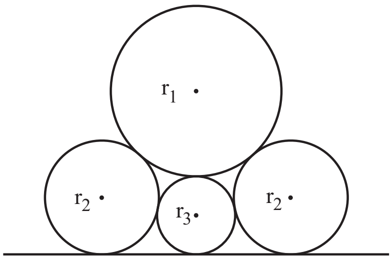


図 6: 補助定理 2

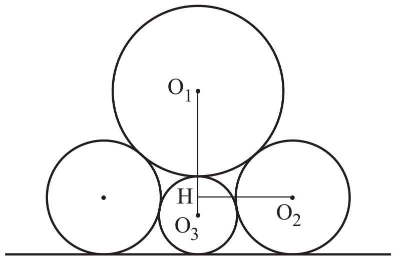


図 7: 補助定理 2 の証明

補助定理 2 　直線上に半径が r_2, r_3, r_2 の連結する 3 個の円が載っている（図 6）。これら 3 円に外接する円の半径 r_1 は次式で与えられる。

$$r_1 = \frac{r_3^2}{r_2 - r_3}$$

（証明）　この補助定理は『算法助術』 [1] の公式 66 である。半径 r_1 の円の中心を O_1、半径 r_2 の右側の円の中心を O_2、半径 r_3 の円の中心を O_3 とし、O_2 から線分 O_1O_3 に引いた垂線の足を H とする。

$\triangle HO_3O_2$ に対して三平方の定理を用いると、

$$HO_2{}^2 = (r_2 + r_3)^2 - (r_2 - r_3)^2 = 4r_2r_3$$

である。また、$\triangle O_1HO_2$ に対して三平方の定理を用いると、

$$HO_2{}^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 + 2r_3 - r_2)^2 = 4r_1(r_2 - r_3) + 4r_2r_3 - 4r_3^2$$

である。この 2 式から、

$$r_1(r_2 - r_3) = r_3^2$$
$$r_1 = \frac{r_3^2}{(r_2 - r_3)}$$

を得る。

3　山崎喜右衛門の算額の左の問題

次に山崎喜右衛門の算額の左側の問題を取り上げる。

【問題 2】

図 8 のように、平円内に甲円 2 個、乙円 3 個がある。甲円の半径が与えられたとき、乙円の半径を求めよ。

【現代解】

これも 4 次方程式に帰着する問題であるが、[2] はここでも Ferrari の公式を用いている。それに対して [5] では反転法を用いることで 4 次方程式ではなく 2 次方程式に帰着させている。ここでは、4 次方程式の係数の対称性を利用し 2 次式 2 つに因数分解する解法を紹介する。

図 9 のように、平円の中心を O、半径を a、甲円の中心を O_1、半径を r_1、乙円の中心を O_2, O_2'、半径を r_2 とする。また、接点を図のように A, B, C, D, E とする。点 O を原点とし、直線 OA が y 軸となるように座標を入れる。点 O_1, O_2 の座標をそれぞれ $(r_1, y_1), (r_2, y_2)$ とする。

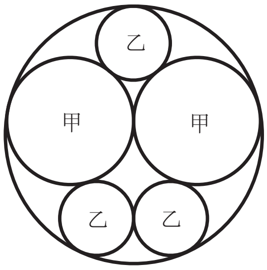


図 8: 問題 2

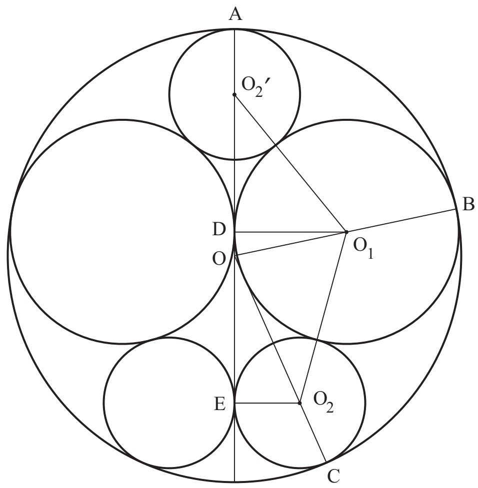


図 9: 問題 2 の証明

線分 OO_1 と OO_2 の長さを計算することで、

$$(a-r_1)^2 = r_1^2 + y_1^2, \quad (a-r_2)^2 = r_2^2 + y_2^2$$

これより、

$$r_1 = \frac{a^2 - y_1^2}{2a}, \quad r_2 = \frac{a^2 - y_2^2}{2a} \tag{10}$$

となる。同様に線分 O_1O_2 と O_1O_2' の長さを計算すると、

$$(r_1+r_2)^2 = (r_1-r_2)^2 + (y_1-y_2)^2, \quad (r_1+r_2)^2 = r_1^2 + (a - r_2 - y_1)^2$$

となるので r_1, r_2 を代入して整理すると、

$$(3a^2 - y_2^2)y_1 - 3ay_2^2 + a^3 = 0$$

$$y_1^2(y_2^2 - 2a^2) + 2a^2y_1y_2 - 2a^2y_2^2 + a^4 = 0$$

となる。従って y_1 は

$$y_1 = \frac{3ay_2^2 - a^3}{3a^2 - y_2^2} \tag{11}$$

これを代入して y_1 を消去すると。

$$7y_2^4 + 8ay_2^3 - 2a^2y_2^2 + 8a^3y_2 + 7a^4 = 0$$

となる。ここで、$y_2 = ta$ とおくと、

$$7t^4 + 8t^3 - 2t^2 + 8t + 7 = 0 \tag{12}$$

を得る。この 4 次方程式は簡単に解くことができる。左辺を 7 倍することで次のように因数分解できる。

$$49t^4 + 56t^3 - 14t^2 + 56t + 49 = (7t^2 + 4t + 7)^2 - 128t^2 = (7t^2 + (4 + 8\sqrt{2})t + 7)(7t^2 + (4 - 8\sqrt{2})t + 7)$$

従って

$$(7t^2 + (4 + 8\sqrt{2})t + 7)(7t^2 + (4 - 8\sqrt{2})t + 7) = 0 \tag{13}$$

ここで、$7t^2 + (4 - 8\sqrt{2})t + 7 = 0$ は実解を持たないので、$7t^2 + (4 + 8\sqrt{2})t + 7 = 0$ を解くと、

$$t = -\frac{1}{7}\left(4\sqrt{2} + 2 \pm \sqrt{16\sqrt{2} - 13}\right)$$

解は $-a < y_2 < 0$ より $-1 < t < 0$ なので、

$$t = -\frac{1}{7}\left(4\sqrt{2} + 2 - \sqrt{16\sqrt{2} - 13}\right) \tag{14}$$

である。

次に、この t の値から甲円と乙円の比を求めることを考えよう。$y_2 = ta$ なので、

$$y_1 = \frac{3t^2 - 1}{3 - t^2}a \tag{15}$$

従って、

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{a^2 - y_2^2}{a^2 - y_1^2} = \frac{1 - t^2}{1 - (\frac{3t^2-1}{3-t^2})^2} = \frac{(t^2 - 3)^2}{8(t^2 + 1)} \tag{16}$$

となる。この式に t の値を直接代入して計算するのは大変なので一工夫しよう。そこで、$p(t) = 7t^4 + 8t^3 - 2t^2 + 8t + 7$ とおく。

$$(t^2 + 1) \cdot \frac{1}{16}(-7t^2 - 8t + 9) + \frac{1}{16}p(t) = 1$$

なので、

$$(t^2 + 1) \cdot \frac{1}{16}(-7t^2 - 8t + 9) \equiv 1 \pmod{p(t)}$$

この式により $(t^2 + 1)$ の逆数が求まる。

$$\frac{1}{(t^2 + 1)} \equiv \frac{1}{16}(-7t^2 - 8t + 9) \pmod{p(t)}$$

従って、

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{(t^2 - 3)^2}{8(t^2 + 1)} \equiv \frac{1}{128}(t^2 - 3)^2(-7t^2 - 8t + 9) \equiv \frac{1}{4}(-3t^2 - 4t + 1) \pmod{p(t)}$$

ここで t の値を代入して計算すると、

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{49}\left(9 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{508\sqrt{2} - 670}\right)$$

従って、答えは

$$r_2 = \frac{1}{49}\left(9 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{508\sqrt{2} - 670}\right) r_1 \tag{17}$$

である。

【算額の解】

算額の術曰には、「2 を平方に開き、2 を加え、これを極と名づけ、8 倍し 5 を減じ、平方に開いて、極を減じ、自乗し、これで甲円径を除して、人円径を得る」とある。すなわち、

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{2} + 2 \\ r_2 &= \frac{r_1}{\left(\sqrt{8w - 5} - w\right)^2} \end{aligned}$$

という式である。和算家の簡潔な答えの表記には感服させられる。

4　栗林佐太郎の算額

栗林佐太郎の算額（図 10、横 76.0cm 縦 81.0cm）は、山崎の算額と同年の嘉永 3 年（1850 年）に伊佐爾波神社に奉納されている。栗林については山崎の門人であること以外の経歴は分かっていない。この算額については [4] [5] に紹介されているが、その解については触れられていない。

【問題 3】

図のように、三角柱の底面に接し互いに外接する 5 個の等球と、それらの上に乗り上面に接する 1 個の異球がある。ただし、等球 1 個と異球は三角形の最大辺を含む側面には接していない。底面の三角形の最大辺ではない 2 辺の長さが 20 寸、6 寸 6 分のとき、三角柱の高さを求めよ。

【現代解】

図 11 は三角柱を真上から見たときの図である。他にも可能性はありそうだが、問題文に合う三角柱はこれ以外にはない。三角柱の底面 $\triangle$ABC において、$\angle$ABC は正五角形の内角に等しいので $108°$ である。異球の中心を O、半径を R、等球の中心を $O_1, O_2, \ldots, O_5$、半径を r とする。ここで、2 辺 AB $= c = 6.6$ と BC $= a = 20$ の比を

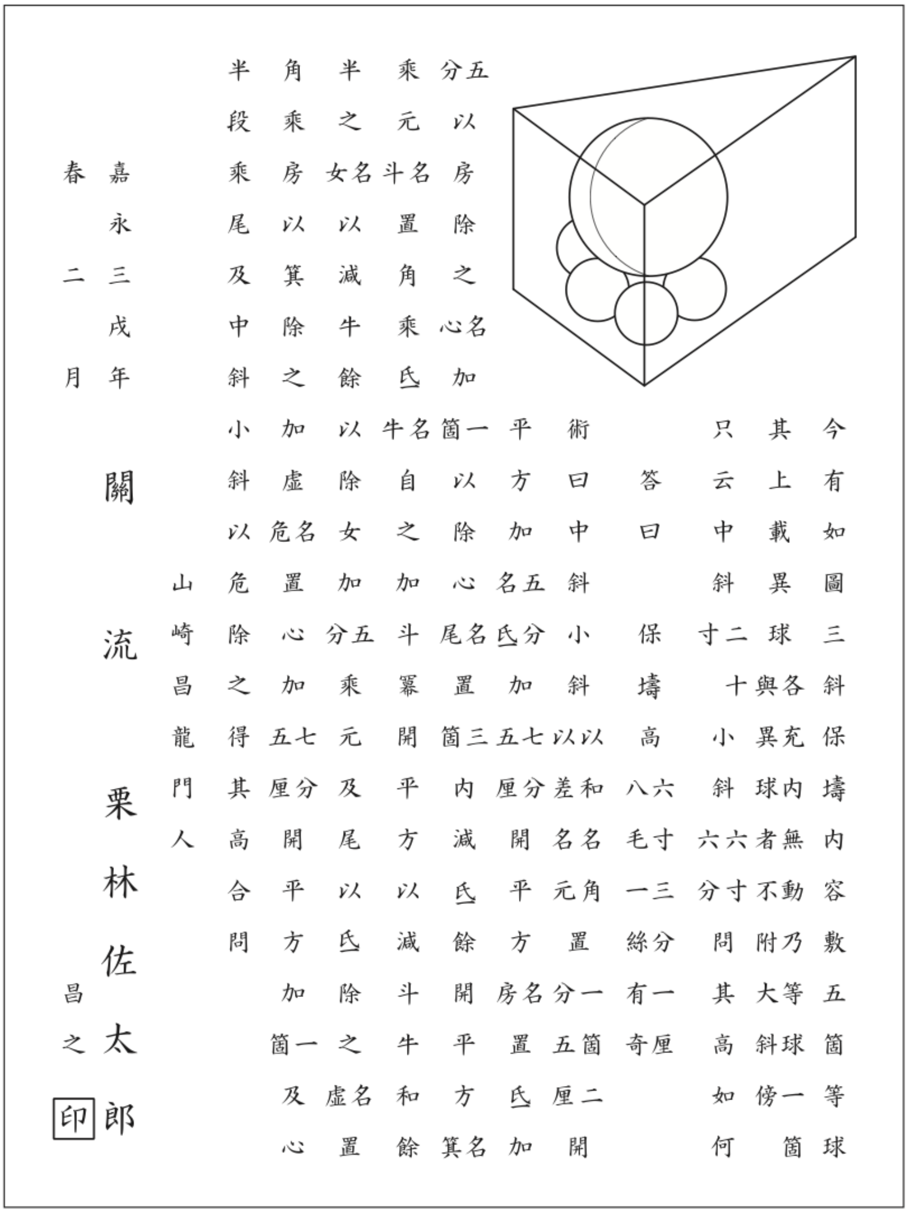
$$w = c/a \tag{18}$$

とおくことにする。この w は $\triangle$ABC の形（相似の範囲内で）を決定するパラメーターである。また、$\theta = 36°$ とおくとき、計算には以下の三角比を用いる。

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} \qquad \cos\theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\sin 2\theta = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} \qquad \cos 2\theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\sin 3\theta = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} \qquad \cos 3\theta = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$$



今有如圖三斜保壽內容數五箇等球
其上載異球各充內無動乃等球一箇與異球者不附大斜傍
只云中斜二十寸小斜六寸六分問其高如何

答曰保壽高六寸三分一厘八毛一絲有奇

術曰中斜小斜以和名角以差名元置一箇二分五厘開
平方加五分名氏加七分五厘開平方名房置氏加
五分以房除之名心加一箇以除心名尾置三箇內減氏餘開平方名箕
乘元名斗置角乘氏名牛自之加斗冪開平方以減斗牛和餘
半之名女以減牛餘以除女加五分乘元及尾以氏除之名虛置
角乘房以箕除之加虛名危置心加七分五厘開平方加一箇及心
半段乘尾及中斜小斜以危除之得其高合問

山崎昌龍門人

嘉永三戌年 關流栗林佐太郎
春二月 昌之 印

図 10: 栗林佐太郎の算額

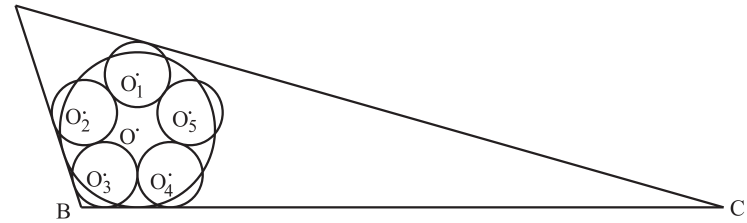


図 11: 上から見た図

図 12 のように、正 5 角形 $O_1O_2O_3O_4O_5$ に外接し、$\triangle ABC$ と相似の位置にある三角形を $\triangle A_1O_3C_1$ とする。同様に、半径 r の円 O' に外接し、$\triangle ABC$ と相似な三角形を $\triangle A_2B_2C_2$ とする。また、3 点 A_1, O_3, C_1 から $\triangle ABC$ の辺に向けて引いている線は全て垂線である。

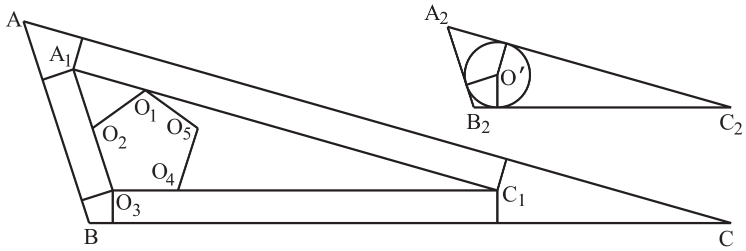


図 12: 相似な三角形

このとき、図 12 での BO_3 を対角線に持つ四角形と B_2O' を対角線に持つ四角形は合同で、同様に C_1C を対角線に持つ四角形と $O'C_2$ を対角線に持つ四角形は合同であることから、

$$BC = O_3C_1 + B_2C_2 \tag{19}$$

が成り立つ。

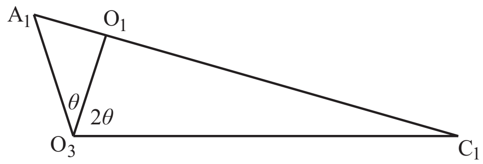


図 13: $\triangle A_1O_3C_1$

次に図 13 を用いて、$\triangle A_1O_3C_1$ について考える。線分 O_3C_1, C_1A_1, A_1O_3 の長さをそれぞれ a_1, b_1, c_1 とする。補助定理 3 により、

$$(a_1 \sin 2\theta + c_1 \sin\theta)O_1O_3 = a_1c_1 \sin 3\theta \tag{20}$$

である。これに、$O_1O_2 = 2r$ で $O_1O_3 = 4r\cos\theta$ 及び $\sin 3\theta = \sin 2\theta$ であることを用いて整理すると、

$$4r(2a_1 \sin\theta\cos\theta + c_1 \sin\theta)\cos\theta = 2a_1c_1 \sin\theta\cos\theta$$

$$2r(2a_1\cos\theta + c_1) = a_1c_1$$

ここで、$c_1 = wa_1$ なので、

$$a_1 = \left(2 + \frac{4\cos\theta}{w}\right)r \tag{21}$$

となる。

次に、$\triangle A_2B_2C_2$ について考える。3 辺の長さを a_2, b_2, c_2 とするとき、余弦定理より、

$$b_2^2 = a_2^2 + c_2^2 - 2a_2c_2\cos 3\theta = a_2^2 + c_2^2 + 2a_2c_2\cos 2\theta = \left(w^2 + 2w\cos 2\theta + 1\right)a_2^2$$

となる。そこで、

$$p = \sqrt{w^2 + 2w\cos 2\theta + 1} \tag{22}$$

とおくことで、$b_2 = pa_2$ となる。また、$\triangle A_2B_2C_2$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}a_2c_2\sin 3\theta = \frac{1}{2}a_2c_2\sin 2\theta$$

なので、補助定理 4 を使い内接円の半径 r との関係式を求めると、

$$\frac{1}{2}(a_2 + b_2 + c_2)r = \frac{1}{2}a_2c_2\sin 2\theta$$

$$(1 + p + w)r = a_2 w\sin 2\theta$$

$$a_2 = \frac{1 + p + w}{w\sin 2\theta}\, r \tag{23}$$

となる。式 (19)、(21)、(23) をまとめると、

$$a = a_1 + a_2 = \left(2 + \frac{4\cos\theta}{w} + \frac{1 + p + w}{w\sin 2\theta}\right)r$$

$$r = \frac{1}{2 + \dfrac{4\cos\theta}{w} + \dfrac{1 + p + w}{w\sin 2\theta}}\, a \tag{24}$$

である。

この式に $a = 20,\ w = 33/100$ を代入して近似計算すると

$$r = 1.0154978504 \tag{25}$$

となる。

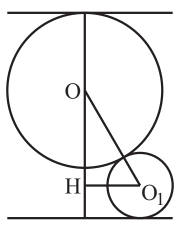


図 14: 切口

最後に三角柱の高さを計算しよう。図 14 は 2 点 O、O_1 を含み底面に垂直な平面で切った切口である。異球の半径 R は図 11 より、

$$R = r + r\cot\theta = r(1 + \cot\theta) \tag{26}$$

である。また、O_1H の長さは、図 11 の O_1O に相当するので、

$$O_1H = \frac{r}{\sin\theta}$$

となり、OH の長さは

$$\mathrm{OH} = \sqrt{(R+r)^2 - O_1H^2} = r\sqrt{(2+\cot\theta)^2 - \frac{1}{\sin^2\theta}} = r\sqrt{3+4\cot\theta} \tag{27}$$

これらを用いると三角柱の高さ h は、$h = r + \mathrm{OH} + R$ を計算して、

$$h = \left(2 + \cot\theta + \sqrt{3+4\cot\theta}\right) r \tag{28}$$

である。この式と (24) を組み合わせた

$$h = \frac{2+\cot\theta+\sqrt{3+4\cot\theta}}{2+\dfrac{4\cos\theta}{w}+\dfrac{1+p+w}{w\sin 2\theta}}\,a \tag{29}$$

が最終的な解である。

また、近似値を計算すると

$$h = 6.2928057034r = 6.3903306651 \tag{30}$$

となる。

【算額の解】

術曰は長文であるので、数式としてまとめてみる。まず、中斜 = BC = a、小斜 = AB = c とおく。説明のため、$\theta = 36^\circ$ とする。

$$角 = a + c, \quad 元 = a - c$$

$$氐^{*} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad (= 2\cos\theta)$$

$$房 = \sqrt{氐 + \frac{3}{4}}$$

$$心 = \frac{氐 + \frac{1}{2}}{房} \quad (= \cot\theta))$$

$$尾 = \frac{心}{心 + 1} \quad (= \frac{1}{1+\tan\theta})$$

$$箕 = \sqrt{3 - 氐} \quad (= 2\sin\theta)$$

$$斗 = 箕 \cdot 元 \quad (= 2(a-c)\sin\theta)$$

$$牛 = 氐 \cdot 角 \quad (= 2(a+c)\cos\theta)$$

$$女 = \frac{斗 + 牛 - \sqrt{牛^2 + 斗^2}}{2}$$

*この漢字は本来は「底」から「广」を取り除いた字であるが、ワープロの都合で「氏」で代用する。

$$虚 = \frac{(\frac{女}{牛-女} + \frac{1}{2}) \cdot 元 \cdot 尾}{氏}$$

$$危 = \frac{角 \cdot 房}{箕} + 虚$$

$$高 = \frac{(\sqrt{心 + \frac{3}{4}} + 1 + \frac{心}{2})\, 尾 \cdot a \cdot c}{危}$$

術日には「高」が答えであるとしめくくられている。これらの式の中で、「氏」から「箕」は角度が関係する値である。「女」の式中にある

$$\sqrt{牛^2 + 斗^2} = 2\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos 3\theta}$$

は辺 AC の長さであり、「高」の中の

$$2(\sqrt{心 + \frac{3}{4}} + 1 + \frac{心}{2}) = 2 + \cot\theta + \sqrt{3 + 4\cot\theta}$$

は (28) で用いた式である。しかしながら、「牛」、「虚」、「危」についてはその式の意味するところがよく分からない。計算方法の違いなのか、計算間違いなのか不明である。術日の式に具体的数値を入れて近似計算してみると「高 = 6.31897」となる。この値は現代解で得られた (30) よりも少し小さい値である。

補助定理 3　△OAB の辺 AB 上の任意の点を P とし、$\angle AOP = \theta_1$、$\angle BOP = \theta_2$、$OA = a$、$OB = b$、$OP = p$ とする。このとき、

$$(a\sin\theta_1 + b\sin\theta_2)p = ab\sin(\theta_1 + \theta_2)$$

が成り立つ。特に、$\theta_1 = \theta_2$ のときは、$(a + b)p = 2ab\cos\theta_1$ である。

（証明）　3 つの三角形 △OAP、△OBP、△OAB の面積を考える。

$$\triangle OAP = \frac{1}{2}ap\sin\theta_1, \quad \triangle OBP = \frac{1}{2}bp\sin\theta_2 \quad \triangle OAB = \frac{1}{2}ab\sin(\theta_1 + \theta_2),$$

従って、△OAP + △OBP = △OAB より、

$$(a\sin\theta_1 + b\sin\theta_2)p = ab\sin(\theta_1 + \theta_2)$$

となる。

補助定理 4　△ABC の面積を S、内接円の半径を r、3 辺の長さを a, b, c とする。このとき、

$$\frac{1}{2}(a + b + c)r = S$$

が成り立つ。

（証明）この関係式は和算でよく用いられている。△OBC + △OCA + △OAB = △ABC により、

$$\frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a + b + c)r = S$$

となる。

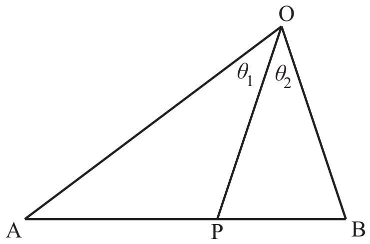


図 15: 補助定理 3

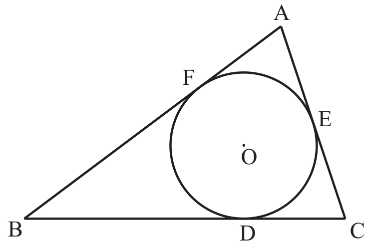


図 16: 補助定理 4

5　まとめ

筆者はこれまで、愛媛県内の算額の歴史及び数学的内容についての調査研究活動を愛媛和算研究会（会長 : 浅山秀博、会員 : 45 名）とともに続けてきた。中でも、松山市道後の伊佐爾波神社に幕末から明治にかけて奉納された算額には当時の和算のレベルの高さを示す難解な問題が数多く含まれているため、ここ数年は、これら算額の数学的内容についての調査研究活動を行ってきた。ようやくそれら全ての解明作業がまとまりつつあるところである。

平成 24 年秋に愛媛大学ミュージアムにて開催された愛媛の算額を紹介する展示会「才能の競演　愛媛の算額　〜愛媛の数学力と和算のおもしろさを探る〜」において、愛媛の算額すべての実物大パネルを展示するとともに、伊佐爾波神社の算額の多くについてその現代解の展示も行った。

この論文では、そこで展示したものの中から 3 つの問題を取り上げ、さらに数学的な考察を掘り下げてみた。特に栗林佐太郎の算額の現代解については、その解法を大幅に見直し補助定理 3 と 4 に帰着させることでその証明を簡潔かつ短く見通しの良いものすることができた。

最後に、本研究は「JSPS 科研費 24501058」の研究助成を受けて行われた研究成果であることを述べてしめくくりたい。

参考文献

[1] 長谷川弘閲/山本賀前編, 算法助術, 1841（天保 12 年）

[2] 相原要之進, 伊豫道後伊佐爾波神社の算額に就いて（II）, 東京物理学校雑誌, 第 589 号, 366–373, 1940.

[3] 浅山秀博・武田三千雄, 愛媛の算額, 1982.

[4] 愛媛和算研究会, 愛媛の算額 〜見学のしおり〜, 2003.

[5] 伊佐爾波神社, 伊佐爾波神社の算額, 2005,

[6] 平田浩一, 伊佐爾波神社の算額にみる江戸末期の和算, 愛媛大学教育学部紀要, 第 60 巻, 195–206, 2013.

[7] 平田浩一, 愛媛の和算と算額, 数学通信, 第 18 巻第 4 号, 5–18, 2014.