鴛鴦の問題とその拡張について

平田浩一 *

Theory of Tait's 8 Coin Puzzle and its Extended Puzzle

Koichi HIRATA *

Abstract: The purpose of this note is to analyze Enoh puzzle (Tait's 8 coin puzzle) and its extended puzzle mathematically. The source of the puzzle in Japan is Genjun Nakane's "Kanja Otogi Zoshi" [1] (1743), and in Europe P. G. Tait's "Listing's Topology" [2] (1884).

Keywords: Enoh Puzzle, Tait's 8 Coin Puzzle.

1　はじめに

この小論では鴛鴦（えんおう，おしどり）の問題とその拡張問題について，その数学的な解析を行うことを目的とする．鴛鴦問題の出典は中根彦循『勘者御伽双紙』[1]（1743）である．西洋では，P. G. Tait が発表した論文 [2]（1884）によりテートの問題（Tait's 8 Coin Puzzle）と呼ばれている．

鴛鴦問題は，白石 3 個と黒石 3 個が [○, ●, ○, ●, ○, ●] のように交互に並んでいる状態からスタートし，隣合った 2 つの石を同時に動かす移動 (以下，鴛鴦移動と呼ぶ) を何回か行い，白石と黒石が別々になる [○, ○, ○, ●, ●, ●] または [●, ●, ●, ○, ○, ○] の状態を作れという問題である．又は，その逆に，[○, ○, ○, ●, ●, ●] の状態からスタートし [○, ●, ○, ●, ○, ●] または [●, ○, ●, ○, ●, ○] を作る問題といってもよい．この両者は本質的には同じ問題であるから，小論では後者の方の問題を研究対象とする．

この鴛鴦問題を Web ブラウザの中で簡単に実行できるようにした Flash アプリ [3] を公開しているので，興味ある方は是非一度アクセスされたし．

もちろん石の個数を増やして，白石 n 個と黒石 n 個として鴛鴦問題は一般化することができる．

$n = 3$ の場合の解き方は幾つかあるが，2 つ例を挙げる．以下，鴛鴦問題の表記では白石を「1」，黒石を「2」，空白を「_」で表すことにする．

$$[1, 1, 1, 2, 2, 2, \_, \_, \_, \_] \to [\_, \_, 1, 2, 2, 2, 1, 1, \_, \_] \to [\_, \_, 1, 2, 2, \_, \_, 1, 2, 1] \to [\_, \_, \_, \_, 2, 1, 2, 1, 2, 1]$$

この解法は，3 回の鴛鴦移動ですむよい手であるが，石 4 個分の空白域が必要である．空白域は石 2 個分があれば十分であることが知られている．空白 2 個の場合の解法は次の 4 回の鴛鴦移動である．

*愛媛大学教育学部　Faculty of Education, Ehime University

$$[1,1,1,2,2,2,\_,\_] \to [\_,\_,1,2,2,2,1,1] \to [2,1,1,2,2,\_,\_,1] \to [2,1,\_,\_,2,1,2,1] \to [2,1,2,1,2,1,\_,\_]$$

次節以後，鴛鴦問題というときは石 2 個分の空白域をもつもののみを考えることにする．

2　鴛鴦問題

この節では，白石 n 個と黒石 n 個からなる一般の鴛鴦問題を解くには一体何回の鴛鴦移動が必要かを考えてみよう．次の定理が成り立つ．

定理 2.1 $n \geq 3$ のとき，白石 n 個と黒石 n 個からなる鴛鴦問題は少なくとも n 回の鴛鴦移動が必要である．

証明のための準備として，現在の白黒の石が置かれている状態がどれだけ (白黒が交互に並ぶ) 目標の状態から離れているかを示す数値を導入する．それをここでは**鴛鴦数**と呼ぶことにする．

定義 2.1 白黒の石の並びに対して，**鴛鴦数**を同じ色の石が隣り合っている箇所の個数として定義する．例えば $[1,1,1,2,2,2,\_,\_]$，$[1,1,2,\_,\_,2,2,1]$ の鴛鴦数はそれぞれ 4，2 である．

第 1 節の $n = 3$ の場合の 3 回の鴛鴦移動の例では鴛鴦数は 4, 3, 1, 0 の順に推移している．4 回の鴛鴦移動の例では 4, 3, 2, 0, 0 である．

(定理 2.1 の証明)　白石 n 個と黒石 n 個が並んでいる初期状態の鴛鴦数は $2n - 2$ である．また，白黒交互に並ぶゴールの状態の鴛鴦数は 0 である．1 回の鴛鴦移動で減少する鴛鴦数は高々2 であることから，もし鴛鴦数が毎回 2 ずつ減少するようなうまい手順が見つかれば，$n - 1$ 回の鴛鴦移動で解けることになる．

しかし，最後の鴛鴦移動は空白を右端か左端に作らなければならないので，右端 2 個か左端 2 個の石を移動することになる．この最後の鴛鴦移動では鴛鴦数が高々1 しか減少しない．従って鴛鴦移動は少なくても n 回必要である．(証了)

この鴛鴦移動 n 回が最短の手順であることが実際に知られている．

定理 2.2 $n \geq 4$ のとき，白石 n 個と黒石 n 個からなる鴛鴦問題は n 回の鴛鴦移動で解くことができる．

ここで紹介する証明は，[4, pp. 209–211] やコマネチ大学数学科のホームページ [5, 第 78 講: おしどり問題] に載っているものである．

(定理 2.2 の証明)　数学的帰納法により，$n \geq 4$ に対して，白石 n 個と黒石 n 個からなる鴛鴦問題 $[1,\cdots,1,2,\cdots,2,\_,\_]$ は n 回の鴛鴦移動で白黒の石が交互に並ぶ $[\_,\_,2,1,\cdots,2,1]$ の状態を作ることで解くことができると仮定する．

次ぎに，白石 $n+4$ 個と黒石 $n+4$ 個からなる鴛鴦問題を考える．最初の 2 回の鴛鴦移動で，

$$[1,1,1,1,1,\cdots,1,2,\cdots,2,2,2,2,\_,\_] \to$$
$$[1,\_,\_,1,1,\cdots,1,2,\cdots,2,2,2,2,1,1] \to$$
$$[1,2,2,1,\underline{1,\cdots,1,2,\cdots,\_,\_},2,2,1,1]$$

のように移動する．ここで，左端の 4 個と右端の 4 個の石を除いた中央部分の $[1,\cdots,1,2,\cdots 2,\_,\_]$ に対して，数学的帰納法の仮定を適用し，n 回の鴛鴦移動で中央部分を白黒交互に並ぶ $[\_,\_,2,1,\cdots,2,1]$ の状態にする．その後 2 回の鴛鴦移動を以下のように行うと，

$$[1,2,2,1,\underline{\_,\_,2,1,\cdots,2,1},2,2,1,1] \to$$
$$[1,2,2,1,2,1,2,1,\cdots,2,1,2,\_,\_,1] \to$$
$$[\_,\_,2,1,2,1,2,1,\cdots,2,1,2,1,2,1]$$

とすることができ，全体が白黒交互に並ぶ状態にすることができる．従って，白石 $n+4$ 個と黒石 $n+4$ 個からなる鴛鴦問題は $n+4$ 回の鴛鴦移動で解くことができる．

あとは $n=4,5,6,7$ に対し，具体的な n 回の鴛鴦移動を示せば，証明は完了する．

($n=4$ の場合)

$$[1,1,1,1,2,2,2,2,\_,\_] \to [1,\_,\_,1,2,2,2,2,1,1] \to [1,2,2,1,\_,\_,2,2,1,1] \to$$
$$[1,2,2,1,2,1,2,\_,\_,1] \to [\_,\_,2,1,2,1,2,1,2,1]$$

($n=5$ の場合)

$$[1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,\_,\_] \to [1,\_,\_,1,1,2,2,2,2,2,1,1] \to [1,2,2,1,1,2,2,\_,\_,2,1,1] \to$$
$$[1,2,2,1,\_,\_,2,1,2,2,1,1] \to [1,2,2,1,2,1,2,1,2,\_,\_,1] \to [\_,\_,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1]$$

($n=6$ の場合)

$$[1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,\_,\_] \to [1,\_,\_,1,1,1,2,2,2,2,2,2,1,1] \to$$
$$[1,2,2,1,1,1,2,\_,\_,2,2,2,1,1] \to [1,2,2,\_,\_,1,2,1,1,2,2,2,1,1] \to$$
$$[1,2,2,1,2,1,2,1,\_,\_,2,2,1,1] \to [1,2,2,1,2,1,2,1,2,1,2,\_,\_,1] \to$$
$$[\_,\_,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1]$$

($n=7$ の場合)

$$[1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,\_,\_] \to [1,\_,\_,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,1,1] \to$$
$$[1,2,2,1,1,1,1,2,2,2,\_,\_,2,2,1,1] \to [1,2,2,1,\_,\_,1,2,2,2,1,1,2,2,1,1] \to$$
$$[1,2,2,1,2,1,1,2,2,\_,\_,1,2,2,1,1] \to [1,2,2,1,2,1,\_,\_,2,1,2,1,2,2,1,1] \to$$
$$[1,2,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,\_,\_,1] \to [\_,\_,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1]$$

これで定理 2.2 の証明が完了．(証了)

この定理の最短手順はあまりにも巧妙すぎるため，鴛鴦問題は他の解き方を考えても無意味であるとの印象を皆に与えてしまっている．そのためか，鴛鴦問題が数学の教材として扱われることはほとんどない．これはとても残念なことである．

この小論の最後の章で，鴛鴦問題の別の解き方を紹介する．その解き方は実に簡単であり，誰にでもでき，自由度の高い解法となっている．

3　拡張鴛鴦問題

鴛鴦問題は，おしどりが雄の集団と雌の集団に分かれている状態から，雌雄が交互に並ぶ状態を作る問題であった．そこで問題をもう少し難しくしてみよう．

雄 n 羽と雌 n 羽のおしどりがいて，既に n 組のカップルができているとする．雄の集団と雌の集団に分かれている状態から，雌雄が交互にしかもカップルが必ず隣にくるように並べる問題へと拡張するのである．この問題を**拡張鴛鴦問題**と呼ぶことにしよう．記事 [6] の中でも拡張鴛鴦問題を取りあげているが，そこでの結論は不十分であった．

定義 3.1 (拡張鴛鴦問題) 白石 n 個に 1 から n までの数字が書いてあり，黒石 n 個にも 1 から n までの数字が書いてある．最初に白石 n 個が並び，続いて黒石 n 個が並んでいる．鴛鴦移動を何回か行うことで，白石と黒石が交互に並び，かつ同じ番号をもつ白黒の石が隣同士になるように並べ替えよ．

拡張鴛鴦問題についても Web ブラウザの中で簡単に実行できるようにした Flash アプリ [7] を公開している．

拡張鴛鴦問題における石配置の状態の表し方として，数字 k が書いてある白石を「k」で表し，数字 k が書いてある黒石を「k'」と表すことにする．石のない空白については今まで通り「_」とする．例えば次のような表し方である．

$$[1, 2, 3, 4, 3', 1', 2', 4', \_, \_]$$

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ を 1 から n までの整数からなる任意の順列とするとき，この拡張鴛鴦問題の初期状態は一般性を失うことなく

$$[1, 2, \cdots, n-1, n, a'_1, a'_2, \cdots, a'_{n-1}, a'_n, \_, \_]$$

と仮定することができる．このことは，各 n に対して $n!$ 個の異なる拡張鴛鴦問題が存在することを意味している．

ここで，拡張鴛鴦問題（$n = 3$）の解答例を 3 つ紹介する．

(1)　4 回の鴛鴦移動で解ける例:

$$[1, 2, 3, 2', 3', 1', \_, \_] \to [\_, \_, 3, 2', 3', 1', 1, 2] \to [1', 1, 3, 2', 3', \_, \_, 2] \to$$
$$[1', 1, \_, \_, 3', 3, 2', 2] \to [1', 1, 2', 2, 3', 3, \_, \_]$$

(2)　5 回の鴛鴦移動が必要な例:

$$[1, 2, 3, 2', 1', 3', \_, \_] \to [1, \_, \_, 2', 1', 3', 2, 3] \to [1, 2', 1', \_, \_, 3', 2, 3] \to$$
$$[1, 2', 1', 3', 2, \_, \_, 3] \to [1, \_, \_, 3', 2, 2', 1', 3] \to [1, 1', 3, 3', 2, 2', \_, \_]$$

(3)　6 回の鴛鴦移動が必要な例:

$$[1, 2, 3, 3', 1', 2', \_, \_] \to [1, 2, 3, 3', \_, \_, 1', 2'] \to [\_, \_, 3, 3', 1, 2, 1', 2'] \to [3', 1, 3, \_, \_, 2, 1', 2'] \to$$
$$[3', 1, 3, 2, 1', \_, \_, 2'] \to [3', \_, \_, 2, 1', 1, 3, 2'] \to [3', 3, 2', 2, 1', 1, \_, \_]$$

この 3 例は，初期状態が異なると最短の手順数も違ってくることを示している．拡張鴛鴦問題の最短手順の解析は非常に難しいと思われるので，解が存在するのかどうか，また解が存在する場合には，どのような方針で解けばよいか，について次節以後で解析を試みることにする．

4　鴛鴦移動と偶順列・奇順列

この節では，鴛鴦移動を何回か繰り返して到達できる状態とは何かについて考察する．これはある面で拡張鴛鴦問題よりも更に難しい問題を考えることになる．

その準備としていくつかの用語を定義する．

定義 4.1 (鴛鴦移動可能) 1 から m までの番号のついた m 個の石を，初期状態 $[1, 2, 3, \cdots, m, \_, \_]$ からスタートし鴛鴦移動を何回か行い $[a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m, \_, \_]$ の状態に到達できるとき，順列 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m)$ は鴛鴦移動可能と呼び，そうでないときは鴛鴦移動不可能と呼ぶことにする．

次に順列に関して互換・偶順列・奇順列を定義する．

定義 4.2 (互換) 順列 $(\cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots,)$ の 2 つの要素 a_i と a_j を入れ換えて順列 $(\cdots, a_j, \cdots, a_i, \cdots)$ を作る操作を互換という．

互換を繰り返すことですべての順列を生成することができる．例えば，順列 $(3, 2, 4, 1)$ は，$(1, 2, 3, 4) \to (3, 2, 1, 4) \to (3, 2, 4, 1)$ と互換を 2 回行うことで得られる．また，順列 $(2, 4, 1, 3)$ は，$(1, 2, 3, 4) \to (1, 3, 2, 4) \to (2, 3, 1, 4) \to (2, 4, 1, 3)$ と互換を 3 回行って得られる．

また，同じ順列 $(4, 2, 1, 3)$ を得るのに，$(1, 2, 3, 4) \to (4, 2, 3, 1) \to (4, 2, 1, 3)$ のように互換 2 回での手順と，$(1, 2, 3, 4) \to (1, 2, 4, 3) \to (1, 4, 2, 3) \to (4, 1, 2, 3) \to (4, 2, 1, 3)$ のように互換 4 回での手順など，回数の異なる手順が多数存在する．

しかし，その互換の回数が奇数なのか偶数なのかは，個々の順列に対して常に一つに決まることが知られている．その結果として，その順列を得るための互換の回数が，奇数か偶数かによって順列は 2 つのタイプに分けられる．

定義 4.3 (偶順列・奇順列) 順列 $(1, 2, 3, \cdots, m)$ から互換を偶数回行って得られる順列を偶順列という．順列 $(1, 2, 3, \cdots, m)$ から互換を奇数回行って得られる順列を奇順列という．

この偶順列と奇順列の用語を用いることで鴛鴦移動可能性について次のような定理が得られる．

定理 4.1 $m \geq 5$ のとき，順列 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m)$ が鴛鴦移動可能であるための必要十分条件はその順列が偶順列であることである．

この定理を証明するために順を追って幾つかの補題を準備してゆく．最初に必要条件であることを証明する．

補題 4.1 1 から m までの番号のついた m 個の石を，初期状態 $[1, 2, 3, \cdots, m, \_, \_]$ からスタートし，鴛鴦移動を何回か行い，$[a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m, \_, \_]$ の状態に到達できるならば，順列 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m)$ は偶順列である．

(証明)　石の置いていない空白部分 2 カ所を，記号を分けて「$\__l$」と「$\__r$」で表すことにする．そして，常に $\__l$ は $\__r$ の左側にあるものとする．このとき，鴛鴦移動は連続する 2 つの石 a_i, a_{i+1}

と連続する 2 つの空白 $\_{l}, \_{r}$ を入れ換える操作なので，a_i と $\_{l}$ を入れ換える互換のあとに a_{i+1} と $\_{r}$ を入れ換える互換を行ったものである．従って，鴛鴦移動 1 回は互換 2 回に相当する操作である．

初期状態 $[1, 2, 3, \cdots, m, \_{l}, \_{r}]$ から鴛鴦移動を何回か行い $[a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m, \_{l}, \_{r}]$ の状態に到達できるとすれば，この間に m 個の石と 2 個の空白からなる $m+2$ 個の要素が偶数回の互換で動いたことになる．従ってこの操作で得られるものは偶順列である．

鴛鴦移動では 2 個の空白が毎回移動するわけであるが，最終的に 2 つの空白がもとの位置 (右端) に戻るので，上述の鴛鴦移動と最終的に同じ結果になる移動は，2 つの空白を一切動かさないで，1 から m までの数字を書いた石だけを動かす互換操作を繰り返しても実現することが可能である．しかもそのときの互換の回数は偶数である．従って，順列 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m)$ は偶順列である．(証了)

この補題により，鴛鴦移動をいくら繰り返しても奇順列は作れないことが分かった．しかし，この段階では，すべての偶順列を鴛鴦移動で作り出せるかについては不明である．そこで，そのことを示す準備として，鴛鴦移動で任意の数字 k を先頭にもってくることができることを次に証明しよう．

補題 4.2 $m \geq 5$ とし，m 個の石は初期状態において $[1, 2, 3, \cdots, m, \_, \_]$ の順に並んでいるとする．k を 1 から m までの任意の数とするとき，鴛鴦移動を何回か行い k と書かれた石を先頭にもってくることができる．即ち，$[k, \cdots, \_, \_]$ の状態を作ることができる．

(証明)　k によって場合分けして必要な手順を示す．
($k = 1$ の場合)　既に k が先頭にあるので何もしなくてよい．
($k = 2$ の場合)

$$[1, 2, 3, 4, 5, \cdots, \_, \_] \to [1, \_, \_, 4, 5, \cdots, 2, 3] \to [1, 4, 5, \_, \_, \cdots, 2, 3] \to$$
$$[\_, \_, 5, 1, 4, \cdots, 2, 3] \to [2, 3, 5, 1, 4, \cdots, \_, \_]$$

($3 \leq k < m$ の場合)

$$[1, 2, \cdots, k, k+1, \cdots, \_, \_] \to [1, 2, \cdots, \_, \_, \cdots, k, k+1] \to$$
$$[\_, \_, \cdots, 1, 2, \cdots, k, k+1] \to [k, k+1, \cdots, 1, 2, \cdots, \_, \_]$$

($k = m$ の場合)

$$[1, 2, \cdots, m-2, m-1, m, \_, \_] \to [\_, \_, \cdots, m-2, m-1, m, 1, 2] \to [m, 1, \cdots, m-2, m-1, \_, \_, 2] \to$$
$$[m, 1, \cdots, \_, \_, m-2, m-1, 2] \to [m, 1, \cdots, m-1, 2, m-2, \_, \_] \qquad \text{(証了)}$$

補題 4.3 $m = 4$ とし，初期状態を $[1, 2, 3, 4, \_, \_]$ とする．1 から 4 までの任意の数を k とするとき，鴛鴦移動を何回か行い k と書かれた石を先頭にもってくることができる．即ち，$[k, \cdots, \_, \_]$ の状態を作ることができる．

(証明)　$k = 1$ の場合は既に k が先頭にあるので何もしなくてよい．その他の場合は次の手順で操作すればよい．
($k = 2$ の場合)

$$[1,2,3,4,\_,\_] \to [1,\_,\_,4,2,3] \to [1,4,2,\_,\_,3] \to [\_,\_,2,1,4,3] \to [2,1,\_,\_,4,3] \to [2,1,4,3,\_,\_]$$

($k = 3$ の場合)

$$[1,2,3,4,\_,\_] \to [\_,\_,3,4,1,2] \to [3,4,\_,\_,1,2] \to [3,4,1,2,\_,\_]$$

($k = 4$ の場合)

$$[1,2,3,4,\_,\_] \to [\_,\_,3,4,1,2] \to [4,1,3,\_,\_,2] \to [4,\_,\_,1,3,2] \to [4,3,2,1,\_,\_] \quad \text{(証了)}$$

補題 4.2 と補題 4.3 を繰り返すことで次の補題 4.4 が得られる．

補題 4.4 $m \geq 4$ とし，1 から m までの数の中から $m-3$ 個取り出した任意の順列を $(a_1, a_2, \cdots, a_{m-3})$ とするとき，初期状態 $[1,2,3,\cdots,m,\_,\_]$ から鴛鴦移動を何回か行い，$[a_1,a_2,\cdots,a_{m-3},?,?,?,\_,\_]$ の状態を作ることができる．即ち，最後の 3 個の石を除き他の石は任意の順列に並べることができる．

(証明)　初期状態の m 個の石に対して補題 4.2 を用いて a_1 が先頭になるように移動する．残る $m-1$ 個の石に対しても補題 4.2 を用いて a_2 が先頭になるように移動する．これを繰り返すことで a_{m-4} までの石を指定された順番に並べることができる．最後の a_{m-3} については補題 4.3 を用いて移動すればよい．(証了)

あとは，残る最後の 3 個の石の処理だけである．残念ながら 3 個の石だけではどうすることもできない．しかし，その 3 個の石の左側にあるもう 2 個の石も使うと次のような移動が可能となる．

補題 4.5 初期状態 $[x,y,1,2,3,\_,\_]$ から鴛鴦移動を何回か行い，$[x,y,2,3,1,\_,\_]$ の状態と，$[x,y,3,1,2,\_,\_]$ の状態を作ることができる．

(証明)

(1)　$[x,y,2,3,1,\_,\_]$ を作るには次のような 9 回の鴛鴦移動を行えばよい．

$$[x,y,1,2,3,\_,\_] \to [x,\_,\_,2,3,y,1] \to [x,2,3,\_,\_,y,1] \to [\_,\_,3,x,2,y,1] \to [3,x,\_,\_,2,y,1] \to$$
$$[3,x,y,1,2,\_,\_] \to [3,\_,\_,1,2,x,y] \to [3,1,2,\_,\_,x,y] \to [\_,\_,2,3,1,x,y] \to [x,y,2,3,1,\_,\_]$$

(2)　$[x,y,3,1,2,\_,\_]$ を作るには，上の (1) の 9 回の鴛鴦移動を 2 度繰り返してもよいがそれでは手順が多くなるので，(1) の逆操作にあたる次の 9 回の鴛鴦移動を行えばよい．

$$[x,y,1,2,3,\_,\_] \to [\_,\_,1,2,3,x,y] \to [2,3,1,\_,\_,x,y] \to [2,\_,\_,3,1,x,y] \to [2,x,y,3,1,\_,\_] \to$$
$$[2,x,\_,\_,1,y,3] \to [\_,\_,2,x,1,y,3] \to [x,1,2,\_,\_,y,3] \to [x,\_,\_,1,2,y,3] \to [x,y,3,1,2,\_,\_]$$

これで補題 4.5 が証明できた．(証了)

補題 4.6 $m \geq 5$ のとき，順列 $(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ が偶順列であれば，初期状態 $[1,2,\cdots,m,\_,\_]$ から鴛鴦移動を何回か行うことで $[a_1,a_2,\cdots,a_m,\_,\_]$ を作ることができる．

(証明)　$m \geq 5$ とし，$(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ を偶順列とする．補題4.4を用いて，初期状態 $[1, 2, \cdots, m, \_, \_]$ から鴛鴦移動を繰り返して $[a_1, a_2, \cdots, a_{m-4}, a_{m-3}, ?, ?, ?, \_, \_]$ の状態を作ることができる．

続いて，右端の石5個の状態 $[a_{m-4}, a_{m-3}, ?, ?, ?, \_, \_]$ に対して，補題4.5を用いて，$[a_{m-4}, a_{m-3}, a_{m-2}, ?, ?, \_, \_]$ の状態を作ることができる．即ち，石全体としては $[a_1, a_2, \cdots, a_{m-4}, a_{m-3}, a_{m-2}, ?, ?, \_, \_]$ となる．

そこで，気になるのが残る2個の石の並ぶ順番であるが，(a_{m-1}, a_m) か (a_m, a_{m-1}) のいずれかである．もし，それが (a_m, a_{m-1}) だとすれば，奇順列 $(a_1, a_2, \cdots, a_{m-2}, a_m, a_{m-1})$ が鴛鴦移動可能となってしまい補題4.1に矛盾する．従って残る2個の石の順番は (a_{m-1}, a_m) である．従って，この鴛鴦移動の繰り返しによって得られた状態は $[a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}, a_m, \_, \_]$ となる．

以上により，任意の偶順列 $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ に対して，初期状態 $[1, 2, \cdots, m, \_, \_]$ から鴛鴦移動を何回か行うことで $[a_1, a_2, \cdots, a_m, \_, \_]$ が作られることが分かった．(証了)

以上で定理4.1を証明するための準備がすべて整ったので，定理4.1の証明にうつる．

(定理4.1の証明)　補題4.1により，順列 $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ が鴛鴦移動可能であるための必要条件は，その順列 $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ が偶順列であることである．また，補題4.6により，順列 $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ が鴛鴦移動可能であるための十分条件は，$(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ が偶順列であることである．(証了)

この定理を証明するまでの過程で，ゴールとしての偶順列に向かって，どのような方針で鴛鴦移動を行っていけばよいかが，見えてきたと思う．もちろん，この方法は効率の良い手順を得るためのものではないが，ゴールに向かって着実に石を動かして進む道しるべとなっている．

5　拡張鴛鴦問題の解析

この節では，第3節で紹介した拡張鴛鴦問題が解けるための条件について考察する．前節の結論から，拡張鴛鴦問題が解けるがどうかの判断をするためには，初期状態の順列に対して互換を偶数回繰り返して，目標となる状態が導けるかどうかを調べればよい．

そのためこの節では，解けるかどうかだけに着目する．拡張鴛鴦問題を解く手順については第6節で考える．

定理 5.1　n を3以上の奇数とする．1から n までの数からなる任意の順列 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ に対し，$[1, 2, \cdots, n, a'_1, a'_2, \cdots, a'_n, \_, \_]$ を初期状態とする拡張鴛鴦問題は解くことができる．

(証明)　定理4.1よりこの拡張鴛鴦問題が解けるかどうかを判断するためには，初期状態の順列 $(1, 2, \cdots, n, a'_1, a'_2, \cdots, a'_n)$ に対して，互換を偶数回施すことで，ゴールとなる順列に到達できるかどうかを調べればよい．

最初に，順列 $(1, 2, \cdots, n, a'_1, a'_2, \cdots, a'_n)$ に互換を何回か行い，ゴールの順列 $(1, 1', 2, 2', \cdots, n, n')$ を作る．この変形に必要な互換の回数を N とし，N の奇偶で場合分けする．

N が偶数の場合は，$(1, 1', 2, 2', \cdots, n, n')$ をゴールとして拡張鴛鴦問題は解ける．

N が奇数の場合は，更に n 回 (奇数回) の互換を施すことで順列 $(1', 1, 2', 2, \cdots, n', n)$ を作る．この順列もまたゴールである．奇数足す奇数で合計偶数回の互換を行ったことになり，拡張鴛鴦問題は解けることが分かる．

以上により，n が奇数の場合には拡張鴛鴦問題は常に解けることが分かる．(証了)

定理 5.2 n を 4 以上の偶数とする．1 から n までの数からなる任意の順列 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ に対し，$[1, 2, \cdots, n, a'_1, a'_2, \cdots, a'_n, \_, \_]$ を初期状態とする拡張鴛鴦問題が解けるための必要十分条件は，

(1) n が 4 の倍数のとき，順列 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ が偶順列であること

(2) n が 4 の倍数でないとき，順列 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ が奇順列であること

である．

(証明) 最初に，順列 $(1, 2, \cdots, n, a'_1, a'_2, \cdots, a'_n)$ に互換を施し順列 $(1, 2, \cdots, n, 1', 2', \cdots, n')$ を作る．この変形に必要な互換の回数 N は，順列 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ が偶順列か，奇順列かにより，それぞれ奇数，偶数である．

続いて，順列 $(1, 2, \cdots, n, 1', 2', \cdots, n')$ から順列 $(1, 1', 2, 2', \cdots, n, n')$ を作るための互換の回数 M は，n が 4 の倍数のとき偶数である，n が 4 の倍数でないときは奇数である．

あとは簡単な計算で $N + M$ が奇数か偶数を判断することで定理 5.2 の結論を得ることができる．(証了)

ここで注意．n が偶数の場合は，順列 $(1, 1', 2, 2', \cdots, n, n')$ から順列 $(1', 1, 2', 2, \cdots, n', n)$ を得るときの互換の回数は偶数であるため，定理 5.1 の証明の最後で行ったようなトリックは適用できない．

6 拡張鴛鴦問題の攻略法

第 5 節の定理 5.1 と定理 5.2 で拡張鴛鴦問題が解けるかどうかについて調べたので，この節では拡張鴛鴦問題の攻略法についてまとめてみる．

1 から n までの数からなる任意の順列 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ に対し，$[1, 2, \cdots, n, a'_1, a'_2, \cdots, a'_n, \_, \_]$ を初期状態とする拡張鴛鴦問題が与えられているとする．ただし，$n \geq 3$ とする．

【手順 1】どのように並べたいか目標を決める．目標を，例えば，

$$[1, 1', 2, 2', \cdots, n, n', \_, \_]$$

とする．

【手順 2】補題 4.2，補題 4.3 に述べた手順を繰り返し，補題 4.4 の状態を作る．

$$[1, 1', 2, 2', \cdots, n-2, (n-2)', n-1, ?, ?, ?, \_, \_]$$

すなわち，目標の状態まで，残り石 3 個の状態を作る．

【手順 3】残りの石 3 個にその左の石 2 個を加えた 5 個の石

$$[(n-2)', n-1, ?, ?, ?, \_, \_]$$

にたいして，第 4 節に述べた補題 4.5 を適用して，

$$[(n-2)', n-1, (n-1)', ?, ?, \_, \_]$$

を作る．ここで，もし結果が $[(n-2)', n-1, (n-1)', n, n', \_, \_]$ となっていれば完成．

【手順 4】手順 3 の結果が，$[(n-2)', n-1, (n-1)', n', n, \_, \_]$ の場合.

(1)　n が偶数のときは，この拡張鴛鴦問題がそもそも解くことができない問題であった.

(2)　n が奇数のときは，手順 1 で決めた目標設定を，石の色が逆に並ぶ，例えば $[1', 1, 2', 2, \cdots, n', n, \_, \_]$ に変えて，手順 1 からやり直す.

7　鴛鴦問題の攻略法

最後に鴛鴦問題の攻略法についても，第 4 節の結果をふまえてまとめてみる．白石 n 個と黒石 n 個が $[1, 1 \cdots, 1, 2, 2, \cdots, 2, \_, \_]$ と並んでいる鴛鴦問題が与えられているとする．ただし，$n \geq 3$ とする．

【手順 1】どのように並べたいか目標を決める．例えば目標を $[1, 2, 1, 2, \cdots, 1, 2, \_, \_]$ とする．

【手順 2】補題 4.2，補題 4.3 に述べた手順を繰り返し，補題 4.4 の状態を作る．

$$[1, 2, \cdots, 1, 2, 1, ?, ?, ?, \_, \_]$$

すなわち，目標の状態まで，残り石 3 個の状態を作る．運が良ければこの時点で問題が解けているかもしれない.

【手順 3】残りの石 3 個にその左の石 2 個を加えた 5 個の石の状態は，$[2, 1, 1, 2, 2, \_, \_]$ または $[2, 1, 2, 2, 1, \_, \_]$ の 2 通りである．ここで，補題 4.5 を適用してもよいのだか，もっと簡単な手順があるので，以下を利用するとよい.

$$[2, 1, 1, 2, 2, \_, \_] \to [\_, \_, 1, 2, 2, 2, 1] \to [2, 2, 1, \_, \_, 2, 1] \to [2, \_, \_, 2, 1, 2, 1] \to$$
$$[2, 1, 2, 2, \_, \_, 1] \to [2, 1, \_, \_, 2, 2, 1] \to [2, 1, 2, 1, 2, \_, \_]$$

$$[2, 1, 2, 2, 1, \_, \_] \to [2, 1, 2, \_, \_, 2, 1] \to [2, \_, \_, 1, 2, 2, 1] \to [2, 2, 2, 1, \_, \_, 1] \to$$
$$[\_, \_, 2, 1, 2, 2, 1] \to [2, 1, 2, 1, 2, \_, \_]$$

参考文献

[1] NPO 法人和算を普及する会, 勘者御伽双紙 中, 2009.

[2] P. G. Tait, Listing's Topologie, Philosophical Magazine, January 1884, pp. 30–46.

[3] 鴛鴦 Flash アプリ, http://www.ed.ehime-u.ac.jp/˜hir ata/enoh/index.html , 2011.

[4] A. Levitin and M. Levitin, Algorithmic Puzzles, Oxford University Press, 2011.

[5] コマネチ大学数学科のホームページ「第 78 講:おしどり問題」，http://gascon.cocolog-nifty.com/blog/2008 /02/78_8dd6.html , 2008.

[6] 平田浩一, 鴛鴦問題の数理, 愛媛県高等学校教育研究会 数学部会誌 52 (2011) pp. 12–17.

[7] 拡張鴛鴦 Flash アプリ, http://www.ed.ehime-u.ac.jp /˜hirata/enoh/index_ex.html , 2011.