一次従属の幾何への応用について

愛媛大学教育学部　平田浩一
hirata@ed.ehime-u.ac.jp

第 86 回全国算数・数学教育研究 (鹿児島) 大会
高専・大学部会
平成 16 年 8 月 5 日

1　はじめに

一次従属は線形代数の重要な概念でありながら、授業では概念的知識の提供のみにとどまり、その応用にふれることは少ない。本研究では一次従属の性質を用いて種々の幾何公式が導かれることを示し、演習問題等としての活用の可能性について報告する。

2　一次従属

ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一次従属であるとは、

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = 0$$

を満たす $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ が存在するときをいう。

また、グラム行列式

$$G(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} \end{vmatrix}$$

を用いるとき、ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一次従属であるための必要十分条件は

$$G(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$$

である。

特に、2 次元ベクトル空間内の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は常に一次従属であり、$G(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$ である。このことはあまりにも明白で取るに足らない事柄のように思われるが、意外にも以下に述べるような幾何公式を導く応用がある。

3　得られた結果

この一次従属なベクトルのグラム行列式を計算するという方法によって、今までに得られた結果を以下に報告する。

3.1　三角形の退化条件

3 点 O, A, B があり、OA= a, OB= b, AB= c とする。この 3 点が同一直線上にあるための条件を a, b, c の間の関係式で表せ。

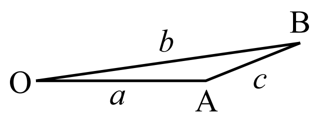

図 1: 三角形の退化条件

簡単な問題である。$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくとき、ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が一次従属となるための条件を計算する問題である。そこで、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a^2$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a^2 + b^2 - c^2)/2$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = b^2$ により、グラム行列式を計算すると、

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a^2 & \frac{a^2+b^2-c^2}{2} \\ \frac{a^2+b^2-c^2}{2} & b^2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \end{aligned}$$

ここで、$s = (a + b + c)/2$ とおくことで、次の結論となる。

$$s(s-a)(s-b)(s-c)=0 \tag{1}$$

この関係式は、ヘロンの公式

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

で面積が 0 になるときと考えればごく自然な結論である。

3.2　中線定理

△OAB の辺 AB の中点を M とする。OA= a, OB= b, AM=BM= c, OM= x とおくとき、長さ a, b, c, x の間の関係式を求めよ。

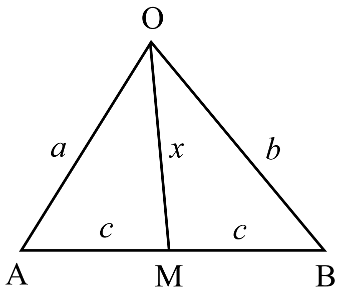

図 2: 中線定理

グラム行列式に持込むため $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \boldsymbol{x}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ とおけば、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}$ は一次従属であり $G(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{x})=0$ である。そこで、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} &= a^2\\
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= (a^2+b^2-4c^2)/2\\
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} &= (a^2+x^2-c^2)/2\\
\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} &= b^2\\
\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x} &= (b^2+x^2-c^2)/2\\
\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} &= x^2
\end{aligned}$$

であることから、このグラム行列式を計算すると、

$$G(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4}c^2(a^2+b^2-2c^2-2x^2)^2$$

が得られ、中線定理

$$\frac{a^2+b^2}{2} = x^2+c^2 \tag{2}$$

が導かれる。

この計算の中で、3 点 A, B, M が同一直線上にあることは、式 AB=AM+BM としてグラム行列式の中にインプットされていることに注意しよう。

3.3　中線定理の一般化

△OAB の辺 AB 上の任意の点を P とする。OA= a, OB= b, AP= c, PB= d, OP= x とおくとき、長さ a, b, c, d, x の間の関係式を求めよ。

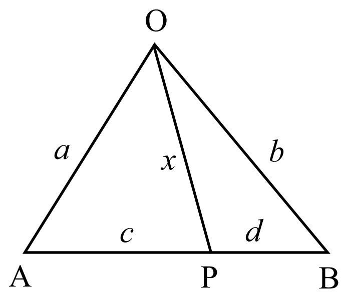

図 3: 中線定理の一般化

これは「中線定理を一般化せよ」という問題である。前節と同様に $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \boldsymbol{x}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおくことで、グラム行列式を

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} &= a^2\\
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= (a^2+b^2-(c+d)^2)/2\\
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} &= (a^2+x^2-c^2)/2\\
\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} &= b^2\\
\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x} &= (b^2+x^2-d^2)/2\\
\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} &= x^2
\end{aligned}$$

を用いて計算すると、

$$G(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4}\{a^2d+b^2c-(c+d)(x^2+cd)\}^2$$

を得る。従って次の関係式を導きだすことができる。

$$\frac{a^2d+b^2c}{c+d} = x^2+cd \tag{3}$$

この関係式は、点 P が線分 AB の外分点であっても成り立つことに注意。

3.4　余弦の加法定理

$\alpha = \cos\theta_1, \beta = \cos\theta_2, \gamma = \cos(\theta_1+\theta_2)$ とする。このとき、α, β, γ の間の関係式を求めよ。

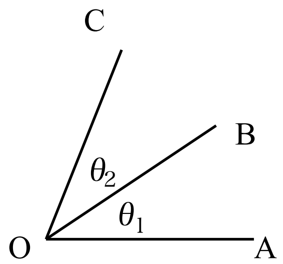

図 4: 余弦の加法定理

$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$　とし、$\angle \mathrm{A0B} = \theta_1$, $\angle \mathrm{BOC} = \theta_2$, $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{c}| = 1$ とする。

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = 1 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \alpha & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = \gamma \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = 1 & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = \beta & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} = 1 \end{array}$$

より、グラム行列式は

$$G(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = 1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$$

となる。従って次の関係式を得る。

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 + 2\alpha\beta\gamma \qquad (4)$$

通常の余弦の加法定理は

$$\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$$

なので奇異に思われるかもしれないが、この式を余弦のみで表そうとすると、

$$\gamma - \alpha\beta = -\sin\theta_1\sin\theta_2$$

とおき両辺を二乗すると、

$$\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma + \alpha^2\beta^2 = \sin^2\theta_1\sin^2\theta_2 = (1-\alpha^2)(1-\beta^2)$$

となり、これを整理すると式 (4) が得られる。

式 (4) で、$\alpha = \beta$ とおくと、

$$(\gamma - 2\alpha^2 + 1)(\gamma - 1) = 0$$

が得られる。このうちの $\gamma - 2\alpha^2 + 1 = 0$ が余弦の 2 倍角の公式である。

3.5　三平方の定理

これは全くつまらない結果であるが、グラム行列式の計算で三平方の定理を導くことができる。

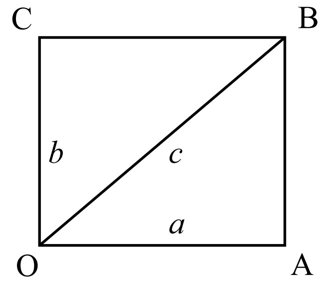

図 5: 三平方の定理

四角形 OABC を長方形とし、OA= a, OC= b, OB= c とする。$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$　とおくとき、正射影をつかい内積を計算すると、

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a^2 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a^2 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = 0 \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = c^2 & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = b^2 & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} = b^2 \end{array}$$

となる。従って、

$$G(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = a^2b^2(c^2 - a^2 - b^2)$$

が得られ、

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (5)$$

となる。

3.6　直角三角形 1

AB を斜辺とする直角三角形 OAB の一つの垂線を OH とする。AH= a, BH= b, OH= x とするとき、a, b, x の間の関係式を求めよ。

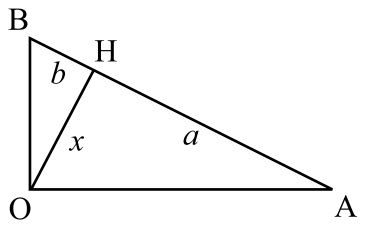

図 6: 直角三角形 1

$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \boldsymbol{x} = \overrightarrow{\mathrm{OH}}$ とおくとき、

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a^2 + x^2 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} = x^2 \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = b^2 + x^2 & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x} = x^2 & \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = x^2 \end{array}$$

となる。従って、

$$G(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) = x^2(ab + x^2)(ab - x^2)$$

となり、次の結論を得る。

$$ab = x^2 \tag{6}$$

3.7 直角三角形 2

AB を斜辺とする直角三角形 OAB の一つの垂線を OH とする。OA= a, 0B= b, OH= x とするとき、a, b, x の間の関係式を求めよ。

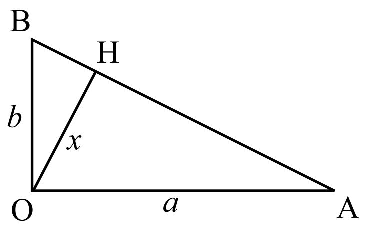

図 7: 直角三角形 2

$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \boldsymbol{x} = \overrightarrow{\mathrm{OH}}$ とおくとき、

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a^2 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} = x^2 \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = b^2 & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x} = x^2 & \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = x^2 \end{array}$$

となる。従って、

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) &= a^2b^2x^2 - a^2x^4 - b^2x^4 \\ &= a^2b^2x^4\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) \end{aligned}$$

となり、次の結論を得る。

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{x^2} \tag{7}$$

3.8 垂線の足

△OAB の一つの垂線を OH とする。OA= a, OB= b, AB= c, AH= x とするとき、a, b, c, x の間の関係式を求めよ。

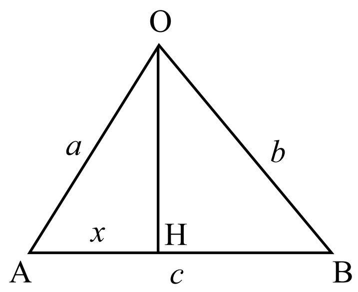

図 8: 垂線の足

次のように 3 つのベクトルを定める。

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AO}}, \quad \boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \quad \boldsymbol{x} = \overrightarrow{\mathrm{AH}}$$

このとき、

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a^2 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = (a^2 + c^2 - b^2)/2 \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} = x^2 & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} = c^2 \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x} = cx & \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = x \end{array}$$

となる。従って、

$$G(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{4}x^2(a^2 - b^2 + c^2 - 2cx)^2$$

となり、次の結論を得る。

$$a^2 + c^2 - b^2 = 2cx \tag{8}$$

この式は、余弦定理

$$a^2 + c^2 - b^2 = 2ac\cos A$$

に $a\cos A = x$ を代入したものである。

3.9　垂線の長さ

△OAB の一つの垂線を OH とする。OA= a, OB= b, AB= c, OH= x とするとき、a, b, c, x の間の関係式を求めよ。

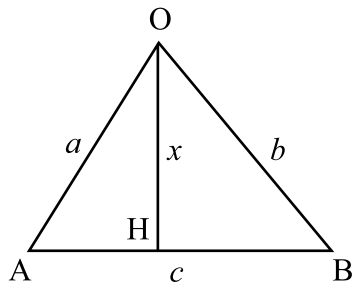

図 9: 垂線の長さ

$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \boldsymbol{x} = \overrightarrow{\mathrm{OH}}$ とおくとき、

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a^2 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a^2+b^2-c^2)/2 \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} = x^2 & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = b^2 \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x} = x^2 & \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = x^2 \end{array}$$

となる。従って、

$$G(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4}x^2(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2+4c^2x^2)$$

となり、次の結論を得る。

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4 = 4c^2x^2 \quad (9)$$

この式の左辺は、

$$(\text{左辺}) = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

と因数分解てきるので、$s = (a+b+c)/2$ とおくことで、式 (9) は次のように変形可能である。

$$s(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{1}{4}c^2x^2$$

最後に △ABC の面積を S とし、上式の右辺が S^2 であることに着目すれば、結局のところ式 (9) はヘロンの公式

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

に帰着する。

3.10　三角形の外接円

△OAB の外接円の半径を R とする。OA= a, OB= b, AB= c とするとき、a, b, c, R の間の関係式を求めよ。

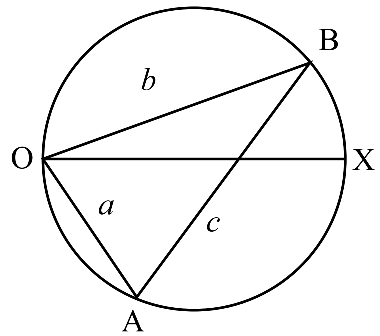

図 10: 外接円

OX を外接円の直径とし、$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \boldsymbol{x} = \overrightarrow{\mathrm{OX}}$ とおく。∠OAX= ∠OBX= 90 °であることにより、

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a^2 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a^2+b^2-c^2)/2 \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} = a^2 & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = b^2 \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x} = b^2 & \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = 4R^2 \end{array}$$

となる。従って、

$$G(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) = R^2(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4)-a^2b^2c^2$$

となり、次の結論を得る。

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4 = \frac{a^2b^2c^2}{R^2} \quad (10)$$

この式は、式 (9) の後で行ったのと同様な変形で、

$$S = \frac{abc}{4R}$$

と同値である。また、この式は正弦定理

$$\frac{b}{\sin \mathrm{A}} = 2R$$

と

$$S = \frac{1}{2}ac\sin A$$

により導かれる公式である。

3.11　四角形の辺と対角線

四角形 OABC がある。OA= a, OB= b, OC= c, BC= x, CA= y, AB= z とするとき、a, b, c, x, y, z の間の関係式を求めよ。

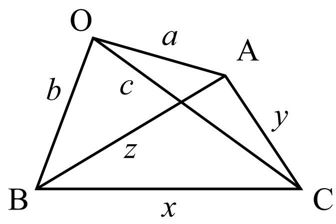

図 11: 四角形の辺と対角線

この問題は、もし四角形が円に内接していれば、その答えはトレミーの定理

$$ax + by = cz$$

である。しかしこの問題では円に内接するという仮定はない。

$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} &= a^2\\
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= (a^2+b^2-z^2)/2\\
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} &= (a^2+c^2-y^2)/2\\
\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} &= b^2\\
\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} &= (b^2+c^2-x^2)/2\\
\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} &= c^2
\end{aligned}$$

である。これよりグラム行列式を計算すると

$$G(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \frac{1}{4}K_3$$

となる。ここで、K_3 は

$$\begin{aligned}
K_3 =& a^2x^2(-a^2+b^2+c^2-x^2+y^2+z^2)\\
&+ b^2y^2(a^2-b^2+c^2+x^2-y^2+z^2)\\
&+ c^2z^2(a^2+b^2-c^2+x^2+y^2-z^2)\\
&- (a^2b^2z^2+b^2c^2x^2+c^2a^2y^2+x^2y^2z^2) \qquad (11)
\end{aligned}$$

である。従って次の関係式を得る。

$$K_3 = 0 \qquad (12)$$

和算ではこの公式を「六斜術」と呼んで基本公式の一つになっているらしい ([1, p. 380], [2, p. 249])。

3.12　四面体の垂線の長さ

四面体 OABC の頂点 O から対面 ABC に垂線 AH を引く。OA= a, OB= b, OC= c, BC= x, CA= y, AB= z, AH= h とするとき、a, b, c, x, y, z, h の間の関係式を求めよ。

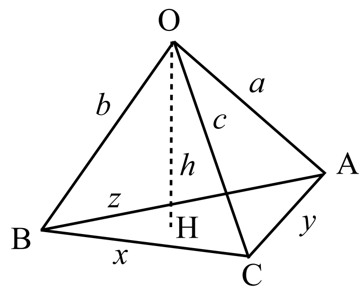

図 12: 四面体の垂線の長さ

$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}, \boldsymbol{h} = \overrightarrow{\mathrm{OH}}$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} &= a^2 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= (a^2+b^2-z^2)/2\\
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} &= (a^2+c^2-y^2)/2 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{h} &= h^2\\
\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} &= b^2 & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} &= (b^2+c^2-x^2)/2\\
\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{h} &= h^2 & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} &= c^2\\
\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{h} &= h^2 & \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{h} &= h^2
\end{aligned}$$

である。これよりグラム行列式を計算すると

$$
\begin{aligned}
G(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{h}) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{h} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{h} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{h} \\ \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{h} \end{vmatrix} \\
&= -\frac{1}{4}h^2(K_2h^2 - K_3)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、K_2 は、

$$
\begin{aligned}
K_2 =&(x+y+z)(-x+y+z) \\
&(x-y+z)(x+y-z) \qquad (13)
\end{aligned}
$$

で、K_3 は式 (11) である。従って、次の関係式を得る。

$$K_2h^2 = K_3 \qquad (14)$$

ヘロンの公式により、△ABC の面積を S とするとき、

$$K_2 = 16S^2$$

なので、式 (14) は

$$16S^2h^2 = K_3$$

となり、四面体 OABC の体積を V とするとき、

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

により、

$$144V^2 = K_3 \qquad (15)$$

となり、これは四面体の体積に関するオイラーの公式 ([2, p. 247]) である。

また、前節の式 (12) は四面体 OABC の体積が 0 のときであると解釈できる。

3.13 四面体の外接球

四面体 OABC の外接球の半径を R とする。OA= a, OB= b, OC= c, BC= x, CA= y, AB= z とするとき、a, b, c, x, y, z, R の間の関係式を求めよ。

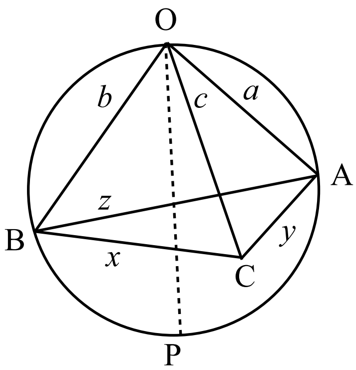

図 13: 四面体の外接球

OP を外接球の直径とし、空間内の 4 つのベクトルを $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおく。従って、

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a^2 && \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a^2+b^2-z^2)/2 \\
&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = (a^2+c^2-y^2)/2 && \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p} = a^2 \\
&\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = b^2 && \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = (b^2+c^2-x^2)/2 \\
&\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{p} = b^2 && \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} = c^2 \\
&\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{p} = c^2 && \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p} = 4R^2
\end{aligned}
$$

となる。このときのグラム行列式を計算すると、

$$G(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{p}) = K_3R^2 - \frac{1}{4}L_3$$

となる。ここで K_3 は式 (11) であり、L_3 は

$$
\begin{aligned}
L_3 =&(ax+by+cz)(-ax+by+cz) \\
&(ax-by+cz)(ax+by-cz) \qquad (16)
\end{aligned}
$$

である。

従って、次の関係式が得られる。

$$K_3R^2 = \frac{1}{4}L_3 \qquad (17)$$

この式に前節で得られたオイラーの公式 (15) を代入すると、

$$6VR = \frac{\sqrt{L_3}}{4} \qquad (18)$$

が得られる。この式はクレレの公式 ([2, p. 143]) で、その右辺は 3 辺の長さが ax, by, cz である三角形の面積になっている。

また (17) 式は、R の方程式と見たとき、$K_3 = 0$ かつ $L_3 \neq 0$ であればこの方程式は不能である。それを

幾何学的に解釈すれば、外接球が存在しないときであり、4 点 O, A, B, C が同一平面上にのっているが同一円周上にはない場合である。

同様に、$K_3 = 0$ かつ $L_3 = 0$ であればこの方程式は不定である。その幾何学的解釈は、任意の大きさの球が外接するときであり、4 点 O, A, B, C が同一平面上にありかつ同一円周上にある場合である。

従って

$$L_3 = 0$$

はトレミーの定理 ([1, p. 250], [2, p. 253]) である。

3.14 四面角

空間の 5 点を O,A,B,C,D とし、$\alpha = \cos\angle\mathrm{AOB}$, $\beta = \cos\angle\mathrm{BOC}$, $\gamma = \cos\angle\mathrm{COD}$, $\delta = \cos\angle\mathrm{DOA}$, $\xi = \cos\angle\mathrm{AOC}$, $\eta = \cos\angle\mathrm{BOD}$ とおくとき、$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi, \eta$ の間の関係式を求めよ。

空間内の 4 つのベクトルを $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{0\mathrm{C}}$, $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおく。ここで、$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{d}| = 1$ を仮定しても一般性は失われない。

従って、

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = 1 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d} = \alpha & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = \xi & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d} = \delta & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = 1 \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = \beta & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d} = \eta & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} = 1 & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d} = \gamma & \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d} = 1 \end{array}$$

となる。このときのグラム行列式は

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) = &\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \xi & \delta \\ \alpha & 1 & \beta & \eta \\ \xi & \beta & 1 & \gamma \\ \delta & \eta & \gamma & 1 \end{vmatrix} \\ =&\xi^2\eta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 \\ &- 2\xi\eta\alpha\gamma - 2\alpha\gamma\beta\delta - 2\beta\delta\xi\eta \\ &+ 2\alpha\beta\xi + 2\beta\gamma\eta + 2\gamma\delta\xi + 2\delta\alpha\eta \\ &- \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2 - \xi^2 - \eta^2 + 1 \end{aligned}$$

従って、次の関係式が成立つ。

$$\begin{aligned} 0 = &\xi^2\eta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 \\ &- 2\xi\eta\alpha\gamma - 2\alpha\gamma\beta\delta - 2\beta\delta\xi\eta \\ &+ 2\alpha\beta\xi + 2\beta\gamma\eta + 2\gamma\delta\xi + 2\delta\alpha\eta \\ &- \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2 - \xi^2 - \eta^2 + 1 \end{aligned} \tag{19}$$

参考文献

[1] 岩田至康編, 幾何学大辞典 第 1 巻 基本定理と問題（平面）, 槇書店, 1971.

[2] 岩田至康編, 幾何学大辞典 第 2 巻 基本定理と問題（空間）, 槇書店, 1974.