円鎖と累円公式

平　田　浩　一

1　はじめに

和算の問題には2円 c_a, c_b に挟まれた領域に，円鎖 c_1, c_2, …, c_n を容れ，その円径を問う問題が多数ある。そのような円鎖は第2節にまとめているように，2円 c_a, c_b の位置関係で楕円型，放物型，双曲型に分類することができる。筆者はこれまでに，[6] において放物型円鎖をとりあげ，[8] において，双曲型円鎖の特別な場合にあたるシュタイナー円鎖を取り上げている。

この論文では，算変座標の手法を用いて，楕円型円鎖と双曲型円鎖の一般論を展開し，円鎖中の任意の2円の反転距離 $s(c_i, c_j)$ を計算する累円公式とそれを利用して曲率を求める公式を導く。また，円鎖中の円径を漸化式で計算する安島直円の廉術を，符号つき曲率を用いて現代化した符号つき廉術を紹介する。廉術については [1] [2] の研究があるが，この研究はそれらとは異なった手法を用いている。

2　円鎖の定義と分類

2つの有向円 c_a, c_b に挟まれた円鎖を定義するために，補題を用意する。

補題1　2つの有向円 c_a, c_b $(s(c_a, c_b) \neq -1)$ とその2円に有向外接する c_1 が与えられている。$s(c_a, c_b) > -1$ のとき，3円 c_a, c_b, c_1 に有向外接する c_2 はちょうど2つ存在する（図1）。

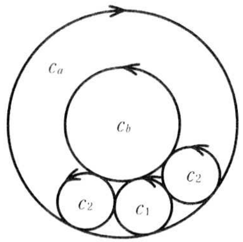

図1　補題1

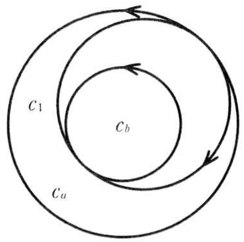

図2　$\alpha<-1$ の場合は c_2 が存在しない

(証明)　基準3円を c_a, c_b, c_1 とし，$s(c_a,\ c_b)=\alpha$ とおくとき，基準距離は $(1,\ 1,\ \alpha)$ で $\sigma=(\alpha+1)^2>0$ となる。このとき，c_2 の算変座標は［1, 1, 1］となるが，［7］の定理5によりこの座標に対応する有向円 c_2 が存在するための条件は

$$\sigma+\tau=(\alpha+1)^2+7+6\alpha-\alpha^2=8(\alpha+1)\geqq 0$$

となる。従って，仮定 $\alpha\neq-1$ により，$\alpha>-1$ のとき c_2 が存在する。［9］の定理10により，その数は高々2個である。ここで，算変座標が［1, 1, 1］となる円 c_2 がただ1つと仮定してみる。基準3円 c_a, c_b, c_1 の直交円を c_o とするとき $c_o\perp c_2$，すなわち $s(c_o,\ c_2)=0$ となるはずである。そこで，$c_o[0, 0, 0]$ と $c_2[1, 1, 1]$ の反転距離 $s(c_o,\ c_2)=x$ を［10］の定理2に代入して計算してみると

$$(\alpha+1)(\alpha x^2+x^2-8)=0$$

となり，$\alpha\neq-1$ なので $x=0$ とすると $8=0$ となり矛盾が生じる。従って，算変座標が［1, 1, 1］となる円 c_2 がただ1つということはあり得ない。よって，円 c_2 はちょうど2つ存在する。　□

図2は $\alpha<-1$ の場合の図で，このとき c_1 は存在するが c_2 は存在しない。

次に，2有向円 c_a, c_b に挟まれた円鎖を定義する。

定義1　2つの有向円 c_a, c_b $(s(c_a,\ c_b)>-1)$ が与えられていて，この2円に有向外接する n 個の有向円 $c_1, c_2,\ldots, c_n$ $(n\geqq 2)$ が次の2つの条件 (a), (b) を満たすとき，$c_1, c_2,\ldots, c_n$ は c_a, c_b に挟まれた円鎖と呼ぶ。

(a)　$s(c_i,\ c_{i+1})=1$　　$(i=1, 2,\ldots, n-1)$

(b)　$c_i\neq c_{i+2}$　　$(i=1, 2,\ldots, n-2)$

さらに次の補題により円鎖はいくらでも延長できる。

補題2（円鎖の一意拡張性）　2つの有向円 c_a, c_b に挟まれた円鎖 $c_1,\ldots, c_n$ $(n\geqq 2)$ が与えられたとき，これを拡張した円鎖 $c_1,\ldots, c_n, c_{n+1},\ldots$ は一意に定まる。

(証明)　定義1の仮定により $s(c_a,\ c_b)>-1$ なので，3円 c_a, c_b, c_n を基準3円として補題1を適用すると，算変座標が［1, 1, 1］である c_{n+1} はちょうど2つ存在する。その一方は c_{n-1} なので他方を c_{n+1} とすることで，c_{n+1} は一意に確定する。同様にして $c_{n+2},\ldots$ も一意に確定する。　□

また，逆向きに $c_2, c_1, c_0, c_{-1},\ldots$ のように拡張することも一意に可能である。

円鎖は次の図のように $s(c_a,\ c_b)=\alpha$ の値により3つに分類される。2円 c_a, c_b が2交点を持つ $-1<\alpha<1$ の場合は楕円型円鎖（図3），2円 c_a, c_b が有向外接する $\alpha=1$ の場合は放物型円鎖（図4），2円 c_a, c_b が共有点を持た

ない $a>1$ の場合は双曲型円鎖（図５）である。双曲型円鎖で最初の円と最後の円が有向外接する場合（$s(c_1, c_n)=1$, $c_{n+1}=c_1$, $c_{n+2}=c_2, \ldots$）が，いわゆるシュタイナー円鎖（円環）である。

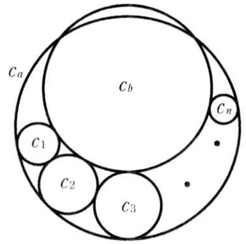

図３　楕円型円鎖

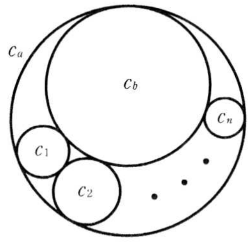

図４　放物型円鎖

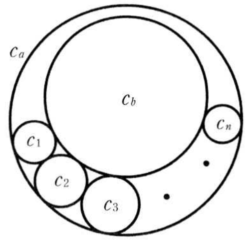

図５　双曲型円鎖

この論文で取り上げる累円公式とは，円鎖中の２円 c_i, c_j の反転距離の値 $s(c_i, c_j)$ を決定する公式である。放物型円鎖については［6］で述べたように次の定理が成り立つ。

定理１　放物型円鎖における累円公式は

$$s(c_i, c_{i+n})=2n^2-1$$

である。

楕円型円鎖と双曲型円鎖の場合は a の値が累円公式に関わるので，定理１のような簡単な式にはならない。

3　曲　率　公　式

ここで述べる曲率公式は，［7］，［9］の半径公式を曲率を使って表現しなお

したものである。有向円 c の符号つき半径が r のとき，c の符号つき曲率 k とは r の逆数 $k=1/r$ のことである。有向直線の符号つき曲率は $k=0$ とする。

円に関する公式は，半径で表すより曲率で表した方が簡潔となる場合が多いので，曲率を使って公式が表現されることも多い。また算変座標の半径公式については，［7］の定理9，定理10のように基準３円の中に直線が含まれる場合を別定理にする必要があった。しかしこれから述べる曲率公式は，直線が含まれる場合も１つの公式で済ますことができるので，応用が広い。

しかし，半径公式に $r_i=1/k_i$ を代入することによる曲率公式の導入では，曲率 k_i が０の場合を証明したことにはならない。曲率が０の場合を含む曲率公式の証明は論文［10］で行った。

定理を述べる前に記号の説明をする。変数 x_i, y_i $(i=1, 2, 3)$ に対して記号 $\hat{x}_i$, $\widehat{xy}_i$ $(i=1, 2, 3)$ を次のように定める。

$$\hat{x}_1=x_2x_3,\quad \hat{x}_2=x_3x_1,\quad \hat{x}_3=x_1x_2$$
$$\widehat{xy}_1=x_2y_3+x_3y_2,\quad \widehat{xy}_2=x_3y_1+x_1y_3,\quad \widehat{xy}_3=x_1y_2+x_2y_1$$

定理２（曲率公式）　基準３円を c_1, c_2, c_3（符号つき曲率はそれぞれ k_1, k_2, k_3）とし基準距離が (e_1, e_2, e_3) で $\sigma\neq 0$ とする。有向円 c の算変座標を $[s_1, s_2, s_3]$ とするとき，円 c の符号つき曲率 k は次の２次方程式

$$(\sigma k-\rho)^2-(\sigma+\tau_s)\tau_k=0$$

で求まり，その解の公式は

$$k=\frac{\rho\pm\sqrt{(\sigma+\tau_s)\tau_k}}{\sigma}$$

である。ここで

$$\rho = \sum_{i=1}^{3}\{(e_i+\hat{e}_i)\widehat{sk}_i+(1-e_i^2)s_i k_i\}$$

$$\tau_s = \sum_{i=1}^{3}\{2(e_i+\hat{e}_i)\hat{s}_i+(1-e_i^2)s_i^2\}$$

$$\tau_k = \sum_{i=1}^{3}\{2(e_i+\hat{e}_i)\hat{k}_i+(1-e_i^2)k_i^2\}$$

とする。

ここで紹介した曲率公式は $\sigma\neq 0$ の場合の公式である。$\sigma\neq 0$ という制約のもとであるが，扱いやすく表現されている。$\sigma=0$ を含む場合にも適用できる曲率公式は［10，定理 1］で，5 次の行列式で表されている。距離公式についても同様で，$\sigma=0$ を含む場合にも適用できる距離公式は［10，定理 2］である。

曲率公式は一般の場合の 4 円を扱っているため，10 変数からなる複雑な式となっている。次に紹介する符号つき 4 円傍斜術は，10 変数のうち 5 変数の値が 1（有向外接している）となる特別な場合であり，この論文の主題となる円鎖の性質の研究に適しているより簡潔な公式である。和算の公式集である『算法助術』に取り上げられている 5 通りの四円傍斜術を一つにまとめた公式となっている。符号つき 4 円傍斜術については［10］で取り上げている。

定理 3（符号つき 4 円傍斜術）　4 有向円 c_a, c_b, c_1, c_2 があり，それぞれの符号つき曲率を k_a, k_b, k_1, k_2 とする。c_a と c_b の組み合わせ以外の，他の 5 通りの 2 円の組み合わせは互いに有向外接していると仮定する（図 6）。c_a と c_b の反転距離を $\alpha>-1$ とし，β を $(\alpha+1)(\beta+1)=4$ により定まる値とする[1]。このとき

1）この β は 5 節の定義 6 で共役反転距離と名付けられるものである。

(a)　$(\alpha+1)^2(k_1+k_2)^2-4(\alpha+1)\{(k_a+k_b)(k_1+k_2)+2k_1k_2\}+4(k_a-k_b)^2=0$

(b)　$$k_2=\frac{2(k_a+k_b)+(3-\alpha)k_1\pm 2\sqrt{4(k_1+k_a)(k_1+k_b)-2(\alpha+1)k_1^2}}{\alpha+1}$$

(c)　$4(k_1+k_2)^2-4(\beta+1)\{(k_a+k_b)(k_1+k_2)+2k_1k_2\}+(\beta+1)^2(k_a-k_b)^2=0$

(d)　$$k_2=\frac{(\beta+1)(k_a+k_b+2k_1)-2k_1}{2}\pm\sqrt{(\beta+1)^2(k_1+k_a)(k_1+k_b)-2(\beta+1)k_1^2}$$

が成り立つ。

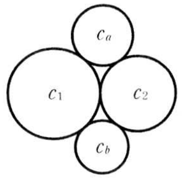

図 6　定理：符号つき 4 円傍斜術

（証明）　基準 3 円を c_1, c_2, c_a とするとき，基準距離は $(e_1,\ e_2,\ e_3)=(1,1,1)$ で $\sigma=4$ である。有向円 c_b の算変座標は $[s_1,\ s_2,\ s_3]=[1,1,\alpha]$ なので，これらの値を定理 2（曲率公式）に代入すると

$$\rho=2(\alpha+1)(k_1+k_2)+4k_a$$
$$\tau_s=4(2\alpha+1)$$
$$\tau_k=4(k_1k_2+k_2k_a+k_ak_1)$$
$$(\sigma k_b-\rho)^2=\{-2(\alpha+1)(k_1+k_2)+4(k_b-k_a)\}^2$$
$$(\sigma+\tau_s)\tau_k=32(\alpha+1)(k_1k_2+k_2k_a+k_ak_1)$$

となるので，これを$(\sigma k_b-\rho)^2-(\sigma+\tau_s)\tau_k=0$に代入して整理すると（a）の$(\alpha+1)^2(k_1+k_2)^2-4(\alpha+1)\{(k_a+k_b)(k_1+k_2)+2k_1k_2\}+4(k_a-k_b)^2=0$が得られる。この式を$k_2$の方程式として整理すると，方程式は

$$(\alpha+1)^2k_2^2+2(\alpha+1)Ak_2+B=0$$

の形をしていて，A, Bは

$$A=\{(\alpha+1)k_1-2(k_a+k_b)\}-4k_1$$
$$B=\{(\alpha+1)k_1-2(k_a+k_b)\}^2-16k_ak_b$$

となる。ここで$(\alpha+1)k_2=X$とおくとき，方程式は

$$X^2+2AX+B=0$$

となり，判別式が

$$\begin{aligned}D'&=A^2-B\\&=-8k_1\{(\alpha+1)k_1-2(k_a+k_b)\}+16k_1^2+16k_ak_b\\&=16(k_1+k_a)(k_1+k_b)-8(\alpha+1)k_1^2\end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned}X&=-A\pm\sqrt{D'}\\&=2(k_a+k_b)+(3-\alpha)k_1\pm2\sqrt{4(k_1+k_a)(k_1+k_b)-2(\alpha+1)k_1^2}\end{aligned}$$

である。従って（b）の

$$k_2=\frac{2(k_a+k_b)+(3-\alpha)k_1\pm2\sqrt{4(k_1+k_a)(k_1+k_b)-2(\alpha+1)k_1^2}}{\alpha+1}$$

が得られる。最後に，（c）と（d）はそれぞれ（a）と（b）に

$$\alpha+1=\frac{4}{\beta+1}$$

を代入して整理することで求まる。□

4　等距離直交円列

円鎖には等距離直交円列が関わっている。ここでは等距離直交円列の定義と性質を述べることにする。

2つの有向円の集合S, S'が与えられたとき，任意の$c\in S$と任意の$c'\in S'$に対して常に$c\perp c'$が成り立つとき，$S\perp S'$と書くことにする。

定義2　図7，図8のように，2有向円c_a，c_bがあり$s(c_a, c_b)=\alpha\neq\pm1$とする。有向円列$d_1, d_2,\ldots, d_n\ (n\geqq2)$と定数$k\neq\pm1$があり次の条件

(a)　$\{c_a, c_b\}\perp\{d_1,\ldots, d_n\}$
(b)　$s(d_i, d_{i+1})=k\quad(i=1, 2,\ldots, n-1)$
(c)　$d_i\neq d_{i+2}\quad(i=1, 2,\ldots, n-2)$

をみたすとき，$d_1, d_2,\ldots, d_n$をc_a，c_bの距離kの**等距離直交円列**という。

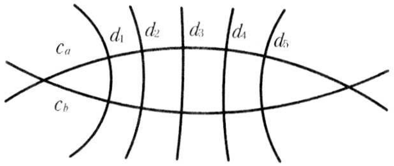

図7 等距離直交円列 $|\alpha|<1$

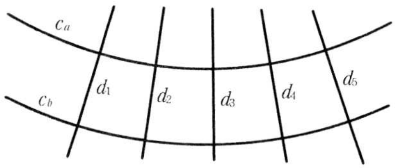

図8 等距離直交円列 $|\alpha|>1$

補題3 反転距離が $\alpha\neq\pm1$ の2有向円 c_a, c_b に距離 k の等距離直交円列 d_1, d_2 が存在するための条件は

(a) $|\alpha|>1$ のとき $|k|<1$
(b) $|\alpha|<1$ のとき $|k|>1$

である。

(証明) $s(c_a, c_b)=\alpha$ なので，基準3円を c_a, c_b, d_1 とするとき基準距離は $(0,\ 0,\ \alpha)$ で $\sigma=\alpha^2-1\neq0$ である。[7] の定理2と [9] の定理2によりこのような基準3円 c_a, c_b, d_1 が存在する。また，d_2 の算変座標は $[0,\ 0,\ k]$ なので

$$\sigma+\tau=\alpha^2-1+k^2(1-\alpha^2)=(\alpha^2-1)(1-k^2)$$

となる。[7] の定理5と [9] の定理8により，有向円 d_2 が存在するための条件は $\sigma+\tau\geqq0$ により

$$(\alpha^2-1)(1-k^2)\geqq0$$

となるので，$|\alpha|>1$ のとき $|k|<1$ で，$|\alpha|<1$ のとき $|k|>1$ となる。 □

補題4（等距離直交円列の一意拡張性） 有向円 c_a, c_b の距離 k の等距離直交円列 d_1, d_2 が与えられたとき，この円列を拡張した等距離直交円列 d_1, d_2,…, d_n は一意に定まる。

(証明) c_a, c_b の等距離直交円列 d_1, d_2 が与えられているので補題3が成り立つ。基準3円を c_a, c_b, d_2 とし $s(c_a, c_b)=\alpha$ とおくとき，基準距離は $(0,\ 0,\ \alpha)$ で $\sigma=\alpha^2-1\neq0$ となる。d_3 の算変座標は円鎖の仮定より $[0,\ 0,\ k]$ である。d_3 の存在は補題3の証明と同様にして $\sigma+\tau\geqq0$ により保証される。算変座標 $[0,\ 0,\ k]$ に対応する円が2個あるとすれば，その一方が d_1 で他方が d_3 となり，等距離直交円列が拡張される。d_4 以後も同様である。

最後に，算変座標 $[0,\ 0,\ k]$ に対応する円が1個ではないことを確認する。ここで場合分けする。

($|\alpha|>1$ の場合) このとき $\sigma>0$ なので，基準3円 c_a, c_b, d_2 の直交円 c_o が存在しその算変座標は $[0,\ 0,\ 0]$ である。[9, 定理10] により，算変座標 $[0,\ 0,\ k]$ に対応する円が d_1 のみとなるのは，$c_o\perp d_1$ となるときである。距離公式により $s(c_o, d_3)=x$ を計算すると

$$x^2=1-k^2$$

となるので，$|k|<1$ により $x\neq0$ であり，$c_o\perp d_1$ となることはない。

($|\alpha|<1$ の場合) $|\alpha|<1$ なので $|k|>1$ となり，d_1 と d_2 は共有点を持たない。また $\sigma<0$ なので，[9, 定理4] により基準3円 c_a, c_b, d_2 の直径交差円 c_k が存在し，c_k は d_2 に直径交差する。従って，d_2 は c_k のある直径ABの両端点A, Bを通る。算変座標 $[0,\ 0,\ k]$ に対応する円が d_1 のみとなるのは，[9, 定理9と補題10] により，d_1 が c_k のある直径CDの両端点C, Dを通るときである。従って d_1, d_2 は共有点を持つことになり，矛盾が生じる。 □

等距離直交円列 $d_1, d_2, \ldots, d_n$ が楕円型円束をなすときは，2点A，Bがあり，すべての円 d_i がその2定点を通る。d_i，d_{i+1} のなす角を θ とすれば，d_i，d_{i+n} のなす角は $n\theta$ となるので，等距離直交円列には n 倍角の公式が関わることになる。

定義3　整数 $n \geqq 0$ に対し**第一種チェビシェフ多項式** $T_n(x)$ をつぎの漸化式

$$T_0(x) = 1,\ \ T_1(x) = x,\ \ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

で定義する。

よく知られているように $\cos x$ と $\cosh x$ に関して

$$\cos nx = T_n(\cos x),\ \ \cosh nx = T_n(\cosh x)$$

が成り立つ。最初の幾つかを具体的に記すと

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,\ \ T_3(x) = 4x^3 - 3x,\ \ T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$
$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x,\ \ T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

で，一般に $T_n(x)$ は整係数の n 次多項式である。図9と図10に $y = T_5(x)$ と $y = T_6(x)$ のグラフを示す。

また，$T_n(x)$ は次の性質を持っている。

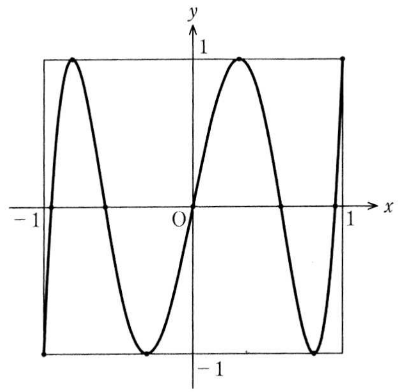

図9　$y = T_5(x)$ **のグラフ**

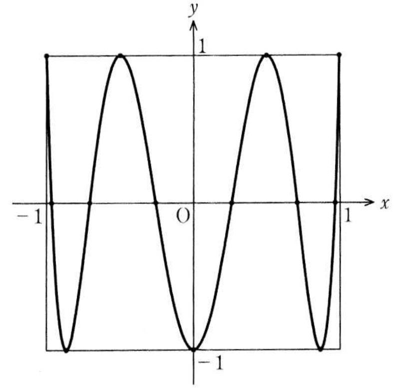

図10　$y = T_6(x)$ **のグラフ**

(1)　$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $-1 \leqq T_n(x) \leqq 1$

(2)　$T_n(1) = 1$，$T_n(-1) = (-1)^n$

(3)　n が奇数のとき $T_n(x)$ は奇関数で，n が偶数のとき $T_n(x)$ は偶関数

(4)　$x = \cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$　$(k = 0,\ 1, \ldots,\ n-1)$ のとき $T_n(x) = 0$

(5)　$x = \cos\dfrac{k\pi}{n}$　$(k = 1, \ldots,\ n-1)$ のとき極値 $T_n(x) = (-1)^k$ をとる

次に $T_n(x)$ に関連する多項式として $V_n(x)$ を定義する。多項式

$$2T_n(x) - x - 1$$

は $x = 1$ を代入すると0となるので $(x-1)$ を因数にもつので，

$$2T_n(x) - x - 1 = (x-1)(\cdots 多項式 \cdots)$$

と表すことができる。そこで多項式 $V_n(x)$ を

$$V_n(x)=\frac{2T_n(x)-x-1}{x-1}$$

と定義する。最初の幾つかを具体的に記すと

$$\begin{aligned}
&V_0(x)=-1,\ V_1(x)=1,\ V_2(x)=4x+3,\\
&V_3(x)=8x^2+8x+1,\\
&V_4(x)=16x^3+16x^2-1, \qquad (1)\\
&V_5(x)=32x^4+32x^3-8x^2-8x+1,\\
&V_6(x)=64x^5+64x^4-32x^3-32x^2+4x+3
\end{aligned}$$

である。

補題5　多項式 $V_n(x)$ について関係式

$$(x-1)(V_n(x))^2+2(x+1)V_n(x)+x+2=V_{2n}(x)$$

が成り立つ。

（証明）　多項式 $T_n(x)$ は $\cos x$ の n 倍角の公式にあたるので

$$T_{2n}(\cos x)=\cos 2nx=2\cos^2 nx-1=2\{T_n(\cos x)\}^2-1$$

をみたし，関係式 $T_{2x}(x)=2\{T_x(x)\}^2-1$ が成り立つ。これを求める式の左辺に適用すると

$$(x-1)(V_n(x))^2+2(x+1)V_n(x)+x+2$$

$$=\frac{\{2T_n(x)-x-1\}^2}{x-1}+\frac{2(x+1)\{2T_n(x)-x-1\}}{x-1}+x+2$$

$$=\frac{4\{T_n(x)\}^2-x-3}{x-1}=\frac{2T_{2n}(x)-x-1}{x-1}=V_{2n}(x)$$

が得られる。□

補題6　2有向円 c_a, c_b と3有向円 d_1, d_2, d_3 があり，$\{c_a, c_b\}\perp\{d_1, d_2, d_3\}$ とする（図11）。ここで $s(d_1, d_2)=x$, $s(d_2, d_3)=y$, $s(d_1, d_3)=z$ とするとき，

$$x^2+y^2+z^2+2xyz-1=0$$

が成り立つ。ただし，$s(c_a, c_b)=\alpha\neq\pm1$ とする。

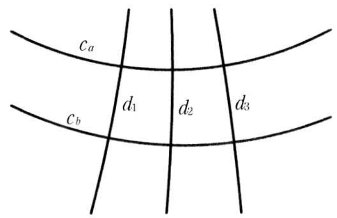

図11　補題6

（証明）　基準3円を c_a, c_b, d_1 とするとき，基準距離は $(0, 0, \alpha)$ で $\sigma=\alpha^2-1\neq0$ である。d_2, d_3 の算変座標はそれぞれ $d_2[0, 0, x]$, $d_3[0, 0, z]$ で $s(d_2, d_3)=y$ である。これを距離公式に代入すると

$$(\alpha^2-1)^2(x^2+y^2+z^2+2xyz-1)=0$$

となり，$\alpha\neq\pm1$ により，

$$x^2+y^2+z^2+2xyz-1=0$$

が得られる。[2)]

□

定理 4　2有向円 c_a, c_b の距離 k の等距離直交円列を $\{d_n\}$ とする。このとき

$$s(d_i,\ d_{i+n})=(-1)^{n+1}T_n(k)\quad (n\geqq 0)$$

が成り立つ。

（証明）　$a_n=s(d_1,\ d_{n+1})(n\geqq 0)$ とおくとき

$$a_n=(-1)^{n+1}T_n(k)$$

を示せばよい。$n=0,\ 1$ については

$$a_0=s(d_1,\ d_1)=-1=-T_0(k),\ a_1=s(d_1,\ d_2)=k=T_1(k)$$

が成り立つ。そこで数学的帰納法により n までについて $a_n=(-1)^{n+1}T_n(k)$ が成り立つと仮定して，$x=a_{n+1}=s(d_1,\ d_{n+2})$ を計算する。このとき，3有向円 d_1, d_{n+1}, d_{n+2} に補題6を用いると

$$s(d_1,\ d_{n+1})=a_n,\ s(d_{n+1},\ d_{n+2})=k,\ s(d_1,\ d_{n+2})=x$$

により

2）3円 d_1, d_2, d_3 は同一円束に属すので［5］の補題18に相当する。

$$x^2+2ka_nx+a_n^2+k^2-1=0$$

となる。この x の2次方程式の2解は a_{n-1} と a_{n+1} である。従って，解と係数の関係により

$$a_{n+1}+a_{n-1}=-2ka_n$$

となり

$$\begin{aligned} a_{n+1}&=-2ka_n-a_{n-1}\\ &=-(-1)^{n+1}2kT_n(k)-(-1)^nT_{n-1}(k)\\ &=(-1)^{n+2}\{2kT_n(k)-T_{n-1}(k)\}\\ &=(-1)^{n+2}T_{n+1}(k) \end{aligned}$$

が得られる。従って数学的帰納法により $a_n=(-1)^{n+1}T_n(k)$ が任意の $n\geqq 0$ に対して証明された。　□

5　算変座標を用いた累円公式

円鎖の累円公式を考えるにあたって，注意すべき点がいくつかある。その一つが，2円 c_a, c_b の反転距離を α とするとき，$-1<\alpha<1$ の場合には2円に挟まれた円鎖が存在する領域が図12のように2つの連結成分に分かれることである。円鎖は一つの連結成分内にとどまり他の連携成分まで到達することはない。

もう一つが，次の図13と図14の区別である。反転距離を用いた記述ではどちらの図の場合も

$$s(c_a,\ d)=s(c_a,\ d')=s(c_b,\ d)=s(c_b,\ d')=0$$

$$s(c_a, c)=s(c_a, c')=s(c_b, c)=s(c_b, c')=s(c, d)=s(c', d')=1$$

となり，2つの図には明らかな相違があるのに，両者を反転距離や算変座標では区別できないことである。

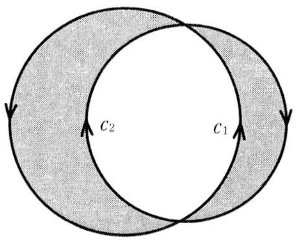

図12　2つの連結成分

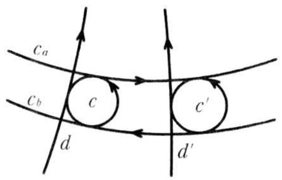

図13　d, d' が同じ向き

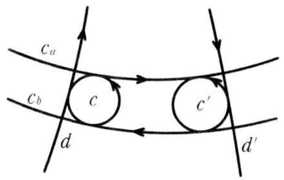

図14　d, d' が逆の向き

そこで，このような c と d の対 (c, d) に対して，向きを定義する。

定義 4　2円 c_a, c_b がありその反転距離を $\alpha>-1$ とする。2円 c, d が

$$\{c_a, c_b\}\perp\{d\},\ s(c_a, c)=s(c_b, c)=1,\ s(c, d)=1$$

をみたすとき，対 (c, d) を c_a, c_b の**共役円対**と呼ぶことにする。

図15のように，c_a, c_b の共役円対 (c, d) があるとき，円 d は c_a, c_b と交わることで複数の円弧に分割される[3]。それらの円弧のうち，c と d の接点Tを含む円弧を，円 d の向きに従い円弧PQとする。点Pが c_a 上にあり点Qが c_b 上にあるとき，共役円対 (c, d) の向きは c_a から c_b の向きと呼ぶことにする。逆に，点Pが c_b 上にあり点Qが c_a 上にあるとき，共役円対 (c, d) の向きは c_b から c_a の向きと呼ぶことにする。

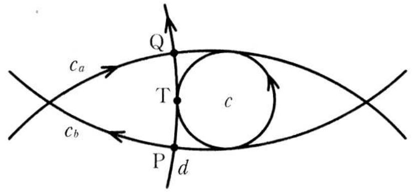

図15　共役円対 (c, d) の向き

定義 5　c_a, c_b の2組の共役円対 (c, d), (c', d') があり，(c, d) と (c', d') が共に c_a から c_b の向きであるか，または共に c_b から c_a の向きであるとき，2組の共役円対 (c, d) と (c', d') は**同じ向きを持つ**と呼ぶことにする。

共役円対の向きを定義するときに用いた，円 d が c_a, c_b と交わることによる円弧の連結成分や，円 d 上に並ぶ点の順番などは，一般メビウス変換で不変なものである。従って同じ向きを持つという用語も一般メビウス変換で不変である。

補題 7（2つの共役円対の相互関係）　図16のように，2有向円 c_a, c_b に挟まれた領域の同一の連結成分内に同じ向きを持つ2つの共役円対 (c, d),

---

3) $\alpha=1$ のときは3つの円弧で，それ以外のときは4つの円弧となる。

$(c',\ d')$ がある。このとき，c_a，c_b の反転距離を α，$s(d,\ d')=x$，$s(c,\ c')=y$ とするとき，関係式

$$(\alpha+1)x-(\alpha-1)y+2=0$$

が成り立つ。ただし，$\alpha>-1$，$\alpha\neq 1$ とする。

（証明）　この補題は反転距離と算変座標を使った計算だけでは証明できないので，メビウス変換で扱いやすい形に変形してから幾何学的な計算により証明する。

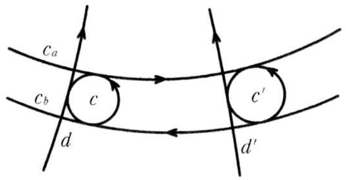

図16　補題 7

$(-1<\alpha<1$ の場合）　このとき c_a と c_b は 2 交点を持つので，メビウス変換でその一方を原点に移し他方を無限遠点に移せば，図 17 のように c_a と c_b は原点 O で交わる 2 直線となる。c_a と c_b のなす角を θ とするとき $\alpha=-\cos\theta$ である。c, c' の符号つき半径をそれぞれ r, r' とする。d, d' はともに原点を中心とする円となるのでそれぞれの符号つき半径を R, R' とする。

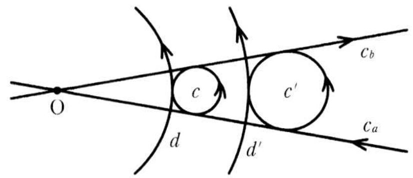

図17　補題 7 の証明（$-1<\alpha<1$ の場合）

共役円対 $(c,\ d)$ と $(c',\ d')$ は c_a，c_b に挟まれた領域の同一の連結成分内にあり同じ向きを持つので，R と R' は同符号で，r と r' も同符号である。ここで r と R の符号が異なる場合には，原点 O を中心とする円による反転で移すことにより，r, r', R, R' のすべてを同符号とすることができる。その符号がすべて負の場合は，原点を通る直線による反転によりすべて正とすることができる。以上により r, r', R, R' はすべて正で（円の向きは反時計回りで）あると仮定しても一般性を失わない。[4]

比例関係 $r:r'=R:R'$ が成り立つので，正の定数 k でもって

$$r'=kr,\ R'=kR$$

と表すことができる。このとき

$$x=s(d,\ d')=\frac{0-R^2-R'^2}{2RR'}=\frac{-(k^2+1)R^2}{2kR^2}=-\frac{k^2+1}{2k}$$

となる。また，c, c' の中心をそれぞれ P, P′ とするとき，

$$\mathrm{PP'}^2=(R'+r'-R-r)^2=(k-1)^2(R+r)^2$$

4）図 17 は共役円対 $(c,\ d)$，$(c',\ d')$ が共に c_a から c_b の向きの場合である。逆向きの場合は c_a と c_b の位置が入れ替わる。

が成り立つことと，c_a と c_b のなす角が θ なので

$$\frac{r}{R+r}=\sin\frac{\pi-\theta}{2}=\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\left(\frac{r}{R+r}\right)^2=\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}=\frac{1-\alpha}{2}$$

により

$$\begin{aligned}
y=s(c,\ c')&=\frac{\mathrm{PP}'^2-r^2-r'^2}{2rr'}\\
&=\frac{(k-1)^2(R+r)^2-(k^2+1)r^2}{2kr^2}\\
&=\left(\frac{k^2+1}{2k}-1\right)\left(\frac{R+r}{r}\right)^2-\frac{k^2+1}{2k}\\
&=(-x-1)\left(\frac{2}{1-\alpha}\right)+x\\
&=\frac{2(x+1)}{\alpha-1}+x
\end{aligned}$$

となり，分母を払うことで

$$(\alpha+1)x-(\alpha-1)y+2=0$$

が得られる。

($\alpha>1$ の場合)　この場合は，メビウス変換により図18のように c_a，c_b を原点Oを中心とする同心円に移すことができ，その符号つき半径を r_a，r_b とするとき，

$$\alpha=s(c_a,\ c_b)=\frac{0-r_a^2-r_b^2}{2r_ar_b}=\frac{r_a^2+r_b^2}{2r_ar_b}$$

$$r_a^2+r_b^2=-2\alpha r_ar_b$$

である。また，d, d' は原点を通る2直線となるので，d, d' のなす角を θ とするとき

$$x=s(d,\ d')=-\cos\theta$$

である。

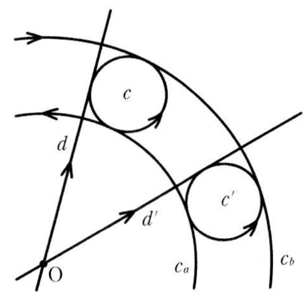

図18　補題7の証明（$\alpha>1$ の場合）

c_a と c_b に挟まれた領域は一つの連結成分からなり，2つの共役円対 $(c,\ d)$，$(c',\ d')$ は同じ向きなので，$r=r'$ となる。ここで，$r=r'<0$ であれば，原点を中心とする円で反転することで $r=r'>0$ と仮定しても一般性を失わない。r_a，r_b は異符号で，c，c' の半径 r は

$$r=\frac{|r_a+r_b|}{2}$$

$$(r_a+r_b)^2=4r^2$$

である。c, c' の中心をそれぞれP, P′ とすれば,

$$\mathrm{OP}=\mathrm{OP}'=\frac{|r_a-r_b|}{2}$$

となり, $\angle \mathrm{POP}'=\theta$ なので,

$$\begin{aligned}\mathrm{PP}'^2&=\mathrm{OP}^2+\mathrm{OP}'^2-2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OP}'\cos\theta\\&=\frac{1}{2}(r_a-r_b)^2(1+x)\end{aligned}$$

により

$$\begin{aligned}y=s(c,\ c')&=\frac{\mathrm{PP}'^2-r^2-r^2}{2r^2}=\frac{\mathrm{PP}'^2}{2r^2}-1\\&=\frac{(r_a-r_b)^2(1+x)}{4r^2}-1=\frac{(r_a-r_b)^2(1+x)}{(r_a+r_b)^2}-1\\&=\frac{(r_a^2+r_b^2-2r_ar_b)(1+x)}{(r_a^2+r_b^2+2r_ar_b)}-1\\&=\frac{(-2\alpha r_ar_b-2r_ar_b)(1+x)}{(-2\alpha r_ar_b+2r_ar_b)}-1\\&=\frac{(\alpha+1)(1+x)}{\alpha-1}-1\end{aligned}$$

となり, 分母を払うことにより

$$(\alpha+1)x-(\alpha-1)y+2=0$$

が得られる。 □

円鎖に関わる補題をいくつか準備する。

補題 8　有向円 c_a, c_b, d_1, d_2, c があり, $\{c_a,\ c_b\}\perp\{d_1,\ d_2\}$ で, 有向円 c は4円 c_a, c_b, d_1, d_2 と有向外接しているとする (図19)。このとき $s(c_a,\ c_b)=\alpha$, $s(d_1,\ d_2)=\beta$ とするとき,

$$(\alpha+1)(\beta+1)=4$$

が成り立つ。[5] ただし, $\alpha>-1$, $\beta>-1$ とする。

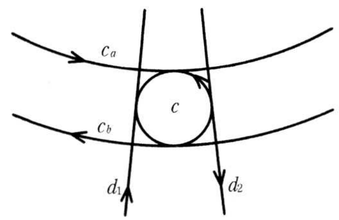

図19　補題 8

(証明)　基準3円を c_a, c_b, d_1 とするとき, 基準距離は $(0,\ 0,\ \alpha)$ で $\sigma=\alpha^2-1$ である。d_2, c の算変座標はそれぞれ $d_2[0,\ 0,\ \beta]$, $c[1,\ 1,\ 1]$ で $s(d_2,\ c)=1$ である。これを距離公式 [10, 定理2] の行列式[6]に代入すると

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha\beta+\alpha+\beta-3)=0$$

5) この補題は岩田 [1] での式 (2.3) に相当する。
6) 証明には $\sigma=0$ のときにも成立する距離公式を用いた。

となり，$\alpha>-1$, $\beta>-1$ により，

$$(\alpha+1)(\beta+1)=4$$

が得られる。 □

この公式は円鎖を考える上で重要な公式で，$\alpha=s(c_a,\ c_b)$ の値が決まれば，円 c の位置に関係なく $\beta=s(d_1,\ d_2)$ の値が決定される。そこで次のように定義する。

定義 6　2有向円 c_a, c_b の反転距離を $\alpha>-1$ とするとき，式

$$(\alpha+1)(\beta+1)=4$$

で定まる $\beta>-1$ を c_a, c_b の**共役反転距離**と呼ぶことにする。

補題 9　2有向円 c_a, c_b に挟まれた円鎖を $\{c_n\}$ とする。c_a, c_b に直交し c_i に有向外接する2有向円の一方の d は c_{i+1} に有向内接する（図 20)。

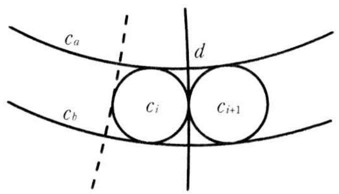

図20　補題 9

（証明）c_a, c_b の反転距離を α とし，基準3円を c_a, c_b, c_i とするとき，基準距離は $(1,\ 1,\ \alpha)$ で $\sigma=(\alpha+1)^2>0$ である。d, c_{i+1} の算変座標はそれぞれ

$[0,\ 0,\ 1]$, $[1,\ 1,\ 1]$ なので，$s(d,\ c_{i+1})=x$ とおくとき距離公式により

$$(\alpha+1)^3(x+1)(\alpha x+x+\alpha-7)=0$$

となり，$\alpha>-1$ より $x=-1,\ \dfrac{7-\alpha}{\alpha+1}$ となる。従って一方の d は c_{i+1} と有向内接する。 □

定義 7　2有向円 c_a, c_b に挟まれた円鎖を $\{c_n\}$ とする。c_i と c_{i+1} に接する補題9の円 d を c_i と c_{i+1} の**共通共役円**と呼ぶことにする。d の向きを明確にしたいときには，c_i に有向外接する方を c_i の**後共通共役円**と呼び，それとは逆向きとなる c_{i+1} に有向外接する方を c_{i+1} の**前共通共役円**と呼ぶことにする。

円束（参考：[5] の5節）という用語を用いて少し補足する。楕円型円鎖の共通共役円の集合 $\{d_i\}$ は双曲型円束に属し，どの2つの共通共役円も共有点を持たない（図 21)。双曲型円鎖の共通共役円の集合 $\{d_i\}$ は楕円型円束に属し，すべての d_i は2定点を通る（図 22)。

補題 10（共通共役円の等間隔性）　2有向円 c_a, c_b に挟まれた円鎖を $\{c_n\}$ とし，c_a, c_b の共役反転距離を β とする。各 c_i の前共通共役円を d_i とするとき，$s(d_i,\ d_{i+1})$ は i によらず一定で

$$s(d_i,\ d_{i+1})=-\beta$$

である。

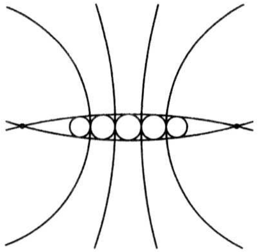

図21　楕円型円鎖の共通共役円

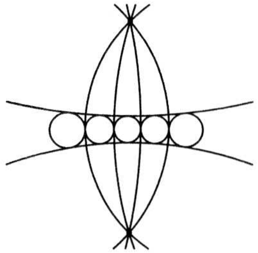

図22　双曲型円鎖の共通共役円

（証明）　補題8より $s(d_i,\ -d_{i+1})=\beta$ なので，$s(d_i,\ d_{i+1})=-\beta$ である。　□

この補題により，円鎖問題には等距離直交円列に関する定理が利用できる。

補題 11　2有向円 c_a，c_b に挟まれた円鎖を $\{c_n\}$ とし，c_a，c_b の共役反転距離を β とする。各 c_i の前共通共役円を d_i とするとき，

$$s(d_i,\ d_{i+n})=-T_n(\beta)(n\geqq 0)$$

が成り立つ（図23)。ただし，$s(c_a,\ c_b)=\alpha\neq 1$ とする。

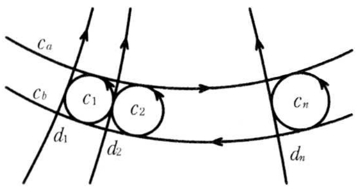

図23　補題11

（証明）　各 c_i の前共通共役円が d_i で，補題10により $s(d_i,\ d_{i+1})=-\beta\neq\pm 1$ であるので，$\{d_i\}$ は c_a，c_b の等距離直交円列である。定理4により

$$s(d_i,\ d_{i+n})=(-1)^{n+1}T_n(-\beta)$$

が成り立つ。ここで n が奇数のときは $T_n(x)$ は奇関数なので $s(d_i,\ d_{i+n})=-T_n(\beta)$ となり，n が偶数のときは $T_n(x)$ は偶関数なので $s(d_i,\ d_{i+n})=-T_n(\beta)$ となる。従って

$$s(d_i,\ d_{i+n})=-T_n(\beta)$$

が得られる。　□

これで準備はほぼ完了したので累円公式を述べることにする。

定理 5（累円の距離公式）　2有向円 c_a，c_b に挟まれた円鎖を $\{c_i\}$ とする。c_a，c_b の反転距離を $\alpha\neq 1$，共役反転距離を β，$s(c_1,\ c_3)=\gamma$ とするとき，$q_n=s(c_i,\ c_{i+n})$ の値は

(a)　$q_n=\dfrac{2-(\alpha+1)T_n(\beta)}{\alpha-1}$

(b)　$q_n=V_n(\beta)$

(c)　$q_n=V_n\left(\dfrac{\gamma-3}{4}\right)$

である。

（証明）　各 c_i の前共通共役円を d_i とするとき，補題11により

$$s(d_i,\ d_{i+n})=-T_n(\beta)$$

である。また，各 i に対して $(c_i,\ d_i)$ は c_a，c_b の共役円対であり，円鎖により繋がっているので c_a，c_b に挟まれた領域の同一連結成分内にあり同じ向きを持っている。従って，補題7が適用できるので，

$$(\alpha+1)s(d_i,\ d_{i+n})-(\alpha-1)s(c_i,\ c_{i+n})+2=0$$

が成り立ち，

$$q_n=\frac{2-(\alpha+1)T_n(\beta)}{\alpha-1}$$

となり (a) が得られる。この式に $(\alpha+1)(\beta+1)=4$ を代入することで

$$q_n=\frac{2T_n(\beta)-\beta-1}{\beta-1}=V_n(\beta)$$

となり (b) が得られる。最後に，c_2 の周りを4円 c_a，c_1，c_b，c_3 が取り囲んでいるので，五円傍斜術に相当する [7] の定理14により

$$(\alpha+1)(\gamma+1)=16$$

が成り立つ。$(\alpha+1)(\beta+1)=4$ により

$$\beta=\frac{\gamma-3}{4}$$

となり，これを (b) に代入することにより (c) となる。 □

最後に，累円の距離公式で得られた値を用いて累円の曲率を求める公式を導入する。

定理6 (累円の曲率公式) 2有向円 c_a，c_b に挟まれた円鎖 $\{c_i\}$ があり，c_a，c_b の反転距離を $\alpha\neq 1$，共役反転距離を β とし，c_a，c_b，c_i の符号つき曲率をそれぞれ k_a，k_b，k_i とする。このとき

$$k_{n+1}=k_1+A\{V_n(\beta)+1\}\pm B\sqrt{V_{2n}(\beta)+1}$$

が成り立つ。ここで，

$$A=\frac{1}{4}\{(\beta+1)(k_a+k_b+2k_1)-4k_1\}$$

$$B=\frac{1}{2}\sqrt{(\beta+1)(k_1+k_a)(k_1+k_b)-2k_1^2}$$

は n に依存しない定数である。

(証明) 計算の細部は省略して，計算の方針を述べることにする。基準3円を c_a，c_b，c_1 とすれば，基準距離は $(1,\ 1,\ \alpha)$ で $\sigma=(\alpha+1)^2>0$ である。定理5(b) により，$s(c_1,\ c_{n+1})=q_n=V_n(\beta)$ なので，c_{n+1} の算変座標は $[1,\ 1,\ q_n]$ である。従って，曲率公式により

$$\begin{aligned}&2(\alpha+1)^2(q_n+1)k_1k_{n+1}+2(\alpha+1)(q_n+1)^2k_ak_b\\&+(\alpha+1)^2(k_1-k_{n+1})^2+(q_n+1)^2(k_a-k_b)^2\\&-2(\alpha+1)(q_n+1)\{2(k_1k_{n+1}+k_ak_b)+(k_1+k_{n+1})(k_a+k_b)\}=0\end{aligned}$$

が成り立つ。この式に $\alpha+1=\dfrac{4}{\beta+1}$ を代入して整理すると

$$32(q_n+1)k_1k_{n+1}+8(\beta+1)(q_n+1)^2k_ak_b$$
$$+16(k_1-k_{n+1})^2+(\beta+1)^2(q_n+1)^2(k_a-k_b)^2$$
$$-8(\beta+1)(q_n+1)\{2(k_1k_{n+1}+k_ak_b)+(k_1+k_{n+1})(k_a+k_b)\}=0$$

となり，さらに k_{n+1} について解くと

$$k_{n+1}=k_1+A(q_n+1)\pm B\sqrt{(\beta-1)q_n^2+2(\beta+1)q_n+\beta+3}$$

となる。ここで $q_n=V_n(\beta)$ なので，補題5を適用すると

$$k_{n+1}=k_1+A\{V_n(\beta)+1\}\pm B\sqrt{V_{2n}(\beta)+1}$$

が得られる。 □

この定理6を用いる場合に $V_n(x)+1$ の計算が必要となる。計算の便宜のため表を用意する。

表1　式 $V_n(x)+1$

n	$V_n(x)+1$
0	0
1	2
2	$4(x+1)$
3	$2(2x+1)^2$
4	$16x^2(x+1)$
5	$2(4x^2+2x-1)^2$
6	$4(x+1)(2x+1)^2(2x-1)^2$

また，この定理6を用いて累円の半径を計算する場合の注意点を説明する。

複号のどちらを選択するかについてである。それには基準3円 c_a, c_b, c_1 の直交円 c_o が関わっていて，求める円 c_i が c_o の内側であるか外側であるかにより適切な符号を選択することとなる。

楕円型円鎖のときは，c_2 が c_o の外側であればそれに続く c_i はすべて外側となるので，c_2 で選んだ符号をそのまま c_i にも適用してよい。しかし双曲型円鎖では，c_2 が c_o の外側であっても，c_i は途中から c_o の内側に入ることがある。そのため複号の選択にはそのつど何らかの判定が必要となるので厄介である。

6　廉　　術

廉術は安島直円が考案したもので，2円 c_a, c_b に挟まれた領域に円鎖 c_1, c_2, c_3,… があるとき，円鎖の半径 r_1, r_2, r_3,… を次の形をした漸化式

$$\frac{1}{r_{n+1}}=A\frac{1}{r_n}-\frac{1}{r_{n-1}}+B$$

により計算する方法である。

この節では，算変座標の考え方に従って廉術を再構築する。

定理7（符号つき廉術）　2有向円 c_a, c_b に挟まれた円鎖 c_1, c_2, c_3,… があり，それぞれの符号つき曲率を k_1, k_2, k_3,… とする。c_a, c_b の反転距離を α，共役反転距離を β とし，それぞれの符号つき曲率を k_a, k_b とする。このとき次の漸化式

(a)　$$k_{n+1}=\frac{2(3-\alpha)}{\alpha+1}k_n-k_{n-1}+\frac{4(k_a+k_b)}{\alpha+1}\qquad(n\geqq 2)$$

(b)　$$k_{n+1}=2\beta k_n-k_{n-1}+(\beta+1)(k_a+k_b)\qquad(n\geqq 2)$$

が成り立つ[7]。

（証明）　c_n の曲率を k_n，c_{n+1} の曲率を x とし，4円 c_a，c_b，c_n，c_{n+1} に定理3（符号つき4円傍斜術）を適用し，x の2次方程式として整理すると

$$x^2-\{2\beta k_n+(\beta+1)(k_a+k_b)\}x+(\cdots\text{定数項}\cdots)=0$$

となる。この2次方程式の2解は k_{n+1} と k_{n-1} なので，解と係数の関係により（b）の式

$$k_{n+1}+k_{n-1}=2\beta k_n+(\beta+1)(k_a+k_b)$$

が得られる。これを α で書き直すと

$$k_{n+1}+k_{n-1}=\frac{2(3-\alpha)}{\alpha+1}k_n+\frac{4(k_a+k_b)}{\alpha+1}$$

（a）の式となる。 □

7　応　　用

応用例としては4題を取り上げる。最初は伊佐爾波神社の関家喜多次の算額である。その内容と現代解は［4］に記されている。ここではその算額の問題を累円の距離公式と累円の曲率公式を使って解いてみる。

例題1　図24のように，円弧内に青，黄，赤，白，黒の5円がある。青，赤，黒の3円の直径が与えられたとき，白円の直径を求めよ。

7）この定理の（b）の漸化式は岩田［1］の式（2,1），(2,2）に相当する。

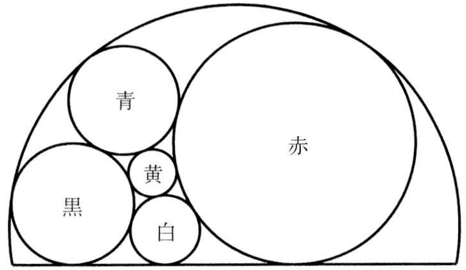

図24　問題1

【解法】　図25のように，赤白黒の3円が接している直線を l_1 とし，向きは左向きとする。黒，赤，白，黄，青の5円をそれぞれ c_a，c_b，c_2，c_3，c_4 とし，円の向きは反時計回りとする。また，外円を c_5 とし円の向きは時計回りとする。このとき，c_a，c_b に挟まれた l_1，c_2，c_3，c_4，c_5 は双曲型円鎖をなしている。また，c_a，c_b，l_1，c_2，c_3，c_4 の符号つき曲率をそれぞれ k_a，k_b，$k_1=0$，k_2，k_3，k_4 とする。

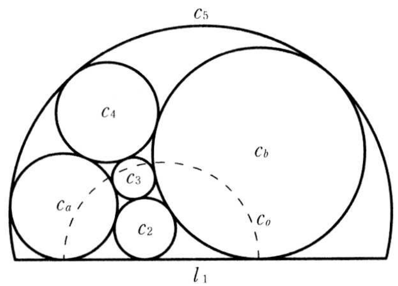

図25　問題1の解法

2有向円 c_a，c_b の反転距離を α，共役反転距離を β とおく。ここで大事な点は，l_1 と c_5 が交わっていることである。すなわち，この α は4円からなるシュタイナー円鎖より小さく，5円からなるシュタイナー円鎖より大きいというこ

とである。従って［8, 表1］により

$$11-4\sqrt{5}<\alpha<3,\ \ 0<\beta<\frac{\sqrt{5}-1}{4} \tag{2}$$

を満たしている。

定理3（符号つき4円傍斜術）の（d）により k_2 を求めると，$k_1=0$ により

$$k_2=\frac{\beta+1}{2}(k_a+k_b\pm 2\sqrt{k_a k_b})$$

$$=\frac{\beta+1}{2}(\sqrt{k_a}\pm\sqrt{k_b})^2$$

となる。この2解は図25での c_2 とその c_0 による反転像なので，求める c_2 の曲率 k_2 は2解のうち大きい方となり

$$k_2=\frac{\beta+1}{2}(\sqrt{k_a}+\sqrt{k_b})^2 \tag{3}$$

である。

円 c_4 の曲率 k_4 は，累円の曲率公式（定理6）に $k_1=0$ を代入して表1を用いて計算すると

$$A=\frac{1}{4}(\beta+1)(k_a+k_b),\ \ B=\frac{1}{2}\sqrt{(\beta+1)k_a k_b}$$

$$k_4=A\{V_3(\beta)+1\}\pm B\sqrt{V_6(\beta)+1}$$

$$=\frac{1}{2}(\beta+1)(2\beta+1)\{(2\beta+1)(k_a+k_b)\pm 2(1-2\beta)\sqrt{k_a k_b}\}$$

を得る。この2解は図25での c_4 とその c_0 による反転像なので，求める c_4 の

曲率は2解のうち小さい方である。条件（2）により $2\beta+1>\beta+1>0$ で $1-2\beta>0$ なので求める解は

$$k_4=\frac{1}{2}(\beta+1)(2\beta+1)\{(2\beta+1)(k_a+k_b)-2(1-2\beta)\sqrt{k_a k_b}\} \tag{4}$$

である。

最後に $\sqrt{k_a}=a$，$\sqrt{k_b}=b$，$(a+b)^2=P$ とおけば式（3）により

$$\beta+1=\frac{2k_2}{P},\ \ 2\beta+1=\frac{4k_2-P}{P},\ \ 1-2\beta=\frac{3P-4k_2}{P}$$

となるので式（4）に代入して分母を払うと

$$P^3k_4=k_2(4k_2-P)\{(4k_2-P)(a^2+b^2)-2ab(3P-4k_2)\}$$

ここで，$a^2+b^2=P-2ab$ を用いて整理すると

$$P^2k_4=k_2(4k_2-P)(4k_2-P-4ab)$$

となり，k_2 の方程式として整理すると

$$16k_2^3-8(P+2ab)k_2^2+P(P+4ab)k_2-P^2k_4=0$$

が得られる。従って，k_2 の3次方程式

$$16k_2^3-8(a^2+4ab+b^2)k_2^2+(a+b)^2(a^2+6ab+b^2)k_2-(a+b)^4k_4=0$$

が導かれる。この3次方程式の解 k_2 が白円 c_2 の曲率である。この式は曲率を

使って表現されているが［4］の半径解と同じものである。

この後の3題は愛媛の和算家大西佐兵衛の和算書『雑題』からの出題である。最初は第11巻の問題である（参照［3］)。

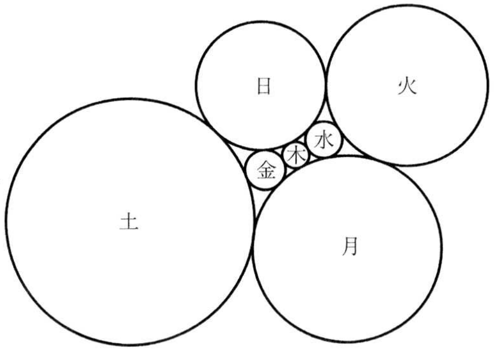

図26 雑題の問題［11-4］

例題2 今，図26のように，4円が相接している。そのすき間に3円を容れる。只云う，火円径17.16寸，水円径3.9寸，木円径2.86寸，金円径4.29寸のとき，土円径はいくらか。

【解法】 日月の2円を c_a，c_b とし，火水木金土の5円を c_1，c_2，c_3，c_4，c_5 とし，円の向きはすべて反時計回りとする。有向円 c_i の曲率を k_i とする。このとき $c_1,\ldots,c_5$ は c_a，c_b に挟まれた双曲型円鎖をなしているので，定理7の漸化式が成り立つが k_a，k_b，α は不明なので，A，B を未定係数として，漸化式を

$$k_{n+1}=Ak_n-k_{n-1}+B$$

とおく。このとき，次の3式が成り立つ。

$$k_2A=k_3+k_1-B \tag{5}$$

$$k_3A=k_4+k_2-B \tag{6}$$

$$k_4A=k_5+k_3-B \tag{7}$$

(6)－(5) と (7)－(6) を計算して

$$(k_3-k_2)A=k_4-k_3+k_2-k_1 \tag{8}$$

$$(k_4-k_3)A=k_5-k_4+k_3-k_2 \tag{9}$$

となるので，さらに$(8)\times(k_4-k_3)-(9)\times(k_3-k_2)$ を計算することで

$$(k_4-k_3+k_2-k_1)(k_4-k_3)-(k_5-k_4+k_3-k_2)(k_3-k_2)=0$$

となり，整理することで

$$k_5=\frac{k_2^2-k_2k_3+(k_1-k_4)(k_4-k_3)}{k_2-k_3}$$

が得られる。最後に，曲率を半径で表すことにより

$$r_5=\frac{r_1r_2r_4^2(r_2-r_3)}{r_1r_4^2(r_2-r_3)+r_2^2(r_1-r_4)(r_3-r_4)}$$

となる。数値を代入すると土円径は26.4寸となる。

次は『雑題』第12巻の問題である。同じ問題が『賽祠神算』に載っていて山田松三郎の算額とある。

例題3 今，図27のように，大，小円が交わり，その間に4円を容れる。大

円径157.25寸，小円径50.32寸，左円径12.58寸，右円径25.16寸のとき，上円径及び下円径はいくらか。

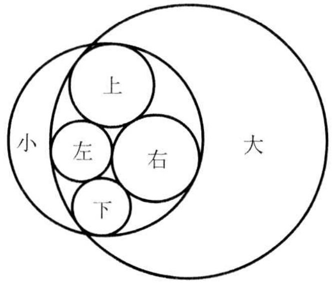

図27　問題3

【解法】 上円，下円をそれぞれ c_a，c_b とし，大円，左円，右円，小円をそれぞれ c_1，c_2，c_3，c_4 とする。向きは大円と小円が時計回り，その他の円は反時計回りとする。対応する符号つき曲率を k_a，k_b，k_1，k_2，k_3，k_4 とする。このとき，c_1，c_2，c_3，c_4 は c_a，c_b に挟まれた双曲型円鎖となっている。

ここで，c_a，c_b の反転距離を α，共役反転距離を β とし，符号つき廉術の定理7（b）により漸化式

$$k_{n+1}=2\beta k_n-k_{n-1}+(\beta+1)(k_a+k_b)$$

が成り立つ。これに k_1，k_2，k_3，k_4 を代入すると

$$k_3=2\beta k_2-k_1+(\beta+1)(k_a+k_b)$$
$$k_4=2\beta k_3-k_2+(\beta+1)(k_a+k_b)$$

となるので，これを解いて

$$\beta=\frac{k_1-k_2+k_3-k_4}{2(k_2-k_3)}$$

$$\beta+1=\frac{k_1+k_2-k_3-k_4}{2(k_2-k_3)} \tag{10}$$

$$k_a+k_b=\frac{2(k_2^2-k_3^2-k_1k_3+k_2k_4)}{k_1+k_2-k_3-k_4} \tag{11}$$

となる。

4円 c_a，c_b，c_1，c_2，に定理3（c）の符号つき4円傍斜術を用いると

$$(\beta+1)^2(k_a-k_b)^2=-4(k_1+k_2)^2+4(\beta+1)\{(k_a+k_b)(k_1+k_2)+2k_1k_2\}$$

となる。この式の右辺に（10），（11）を代入して整理すると

$$(\beta+1)^2(k_a-k_b)^2=\frac{4\{k_2^2(k_3+k_4)-k_3^2(k_1+k_2)\}}{k_2-k_3}$$

となり

$$(k_a-k_b)^2=\frac{16(k_2-k_3)\{k_2^2(k_3+k_4)-k_3^2(k_1+k_2)\}}{(k_1+k_2-k_3-k_4)^2}$$

$$k_a-k_b=\pm\frac{4\sqrt{(k_2-k_3)\{k_2^2(k_3+k_4)-k_3^2(k_1+k_2)\}}}{k_1+k_2-k_3-k_4} \tag{12}$$

が得られる。従って，（11）と（12）の和と差を計算することにより，k_a，k_b は

$$\frac{k_2^2-k_3^2-k_1k_3+k_2k_4\pm2\sqrt{(k_2-k_3)\{k_2^2(k_3+k_4)-k_3^2(k_1+k_2)\}}}{k_1+k_2-k_3-k_4}$$

となる。数値解を計算すると，上円径 24.79 寸で下円径 11.39 寸である。[8]

次は『雑題』の第 17 巻にある問題で，楕円型円鎖の解法手順を問う問題である。

例題 4　今，図 28 のように，甲，乙 2 円が相交わり，その間に累円を容れる。甲円径若干，乙円径若干，丙円径若干，矢若干とし，累円径を問う。

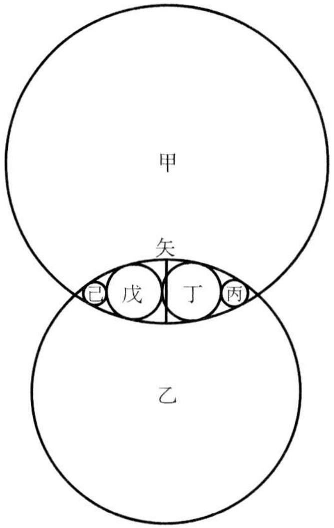

図28 『雑題 第 17 巻』の問題

【解法】　甲円と乙円をそれぞれ c_a, c_b とし，丙円に続く累円をそれぞれ c_1, c_2, c_3, c_4 とする。向きは c_a, c_b が時計回り，その他の円は反時計回りとする。対応する符号つき曲率を k_a, k_b, k_1, k_2, k_3, k_4 とする。このとき，

8）この問題の円径は端数が出ないように作られていて，100 倍するとすべての円径が整数となる。

c_1, c_2, c_3, c_4 は c_a, c_b に挟まれた楕円型円鎖となっている。

矢の長さを $p(0<p<\min(2|r_a|,\ 2|r_b|))$ とするとき，c_a, c_b の反転距離 α は

$$\alpha = s(c_a,\ c_b) = \frac{(p+r_a+r_b)^2 - r_a^2 - r_b^2}{2r_a r_b} = \frac{(pk_a+2)(pk_b+2)-2}{2}$$

$$\alpha + 1 = \frac{(pk_a+2)(pk_b+2)}{2}$$

で，共役反転距離 β は

$$\beta + 1 = \frac{8}{(pk_a+2)(pk_b+2)}$$

である。

次に c_{n+1} の曲率 k_{n+1} を計算してみる。累円の曲率公式（定理 6）により

$$A = \frac{1}{4}\{(\beta+1)(k_a+k_b+2k_1) - 4k_1\} \tag{13}$$

$$B = \frac{1}{2}\sqrt{(\beta+1)(k_1+k_a)(k_1+k_b) - 2k_1^2}$$

とおくとき

$$k_{n+1} = k_1 + A\{V_n(\beta)+1\} \pm B\sqrt{V_{2n}(\beta)+1}$$

である。表 1 を用いて具体的な値を求める。$n=1$ のとき

$$k_2 = k_1 + 2A \pm 2B\sqrt{\beta+1}$$

となる。この値は符号つき4円傍斜術の定理3（d）を用いて計算することもできる。円 c_2 は，基準3円 c_a，c_b，c_1 の直交円 c_o の外側にあるので，複号の選択はマイナスの方となり

$$k_2 = k_1 + 2A - 2B\sqrt{\beta+1} \tag{14}$$

となる。定理6の証明の後に述べた注意により，楕円型円鎖なので他の n に対しても複号の選択はマイナスの方を選べばよい。k_3，k_4 は次のような式になる。

$$k_3 = k_1 + 4A(\beta+1) - 4B\beta\sqrt{\beta+1}$$
$$k_4 = k_1 + 2A(2\beta+1)^2 - 2B(4\beta^2-1)\sqrt{\beta+1}$$

【別解】 別解として符号つき廉術を使った計算もしてみる。式（14）の k_2 の値は求まっているものとする。定理7（b）により漸化式は

$$k_{n+1} = 2\beta k_n - k_{n-1} + (\beta+1)(k_a + k_b)$$

であるが，式（13）により

$$(\beta+1)(k_a + k_b) = 4A - 2\beta k_1 + 2k_1$$

なので，漸化式を

$$k_{n+1} = 2\beta k_n - k_{n-1} + 4A - 2\beta k_1 + 2k_1$$

と書き直すことにする。この漸化式により k_3 は

$$\begin{aligned} k_3 &= 2\beta k_2 - k_1 + 4A - 2\beta k_1 + 2k_1 \\ &= 2\beta(k_1 + 2A - 2B\sqrt{\beta+1}) - k_1 + 4A - 2\beta k_1 + 2k_1 \\ &= k_1 + 4A(\beta+1) - 4B\beta\sqrt{\beta+1} \end{aligned}$$

となる。また，k_4 については

$$\begin{aligned} k_4 &= 2\beta k_3 - k_2 + 4A - 2\beta k_1 + 2k_1 \\ &= 2\beta\{k_1 + 4A(\beta+1) - 4B\beta\sqrt{\beta+1}\} \\ &\quad -(k_1 + 2A - 2B\sqrt{\beta+1}) + 4A - 2\beta k_1 + 2k_1 \\ &= k_1 + 2A(2\beta+1)^2 - 2B(4\beta^2-1)\sqrt{\beta+1} \end{aligned}$$

となる。

8 まとめ

和算には円鎖に関する問題が多数あり，それらの問題を解くための累円公式について，算変座標の考え方を使って解析を行った。第4節では，その背景となる等距離直交円列について取り上げ，n 倍角の公式に相当する公式を定理4にまとめ，また多項式 $V_n(x)$ を定義しその性質について述べた。その結果を用いて第5節では，累円の距離公式を $V_n(x)$ を使って定理5としてまとめ，累円の曲率公式を定理6にまとめた。第6節では安島直円の廉術を現代化した符号つき廉術を紹介した。応用としては和算問題から4つの例題を取り上げた。

今回取り上げられなかったものとして，阿部知翁の円環問題がある。それについても累円の距離公式を使うことで，円鎖中の2円の反転距離に関する公式を導くことができる。そのことについてはまたの機会としたい。

参考文献

[1] 岩田至康，安島直円の『簾術変換』について（1），数学史研究，45（1970），1-15.
[2] 木下宙，安島直円が導いた累円径漸化式の一般解とその応用(1)，初等数学，79(2016)，35

-40.
[3] 谷本賢治,『雑題』巻 11～巻 14 を読む［第 8 回］[11-4] の和算解について，第 51 回愛媛和算研究会発表資料，2024 年 7 月.
[4] 平田浩一・谷本賢治編著, 愛媛の算額研究～現代解法を通して～, 愛媛和算研究会, 2017.
[5] 平田浩一，算変法不変式がつくる座標系について，松山大学論集，34-1(2022)，57-103.
[6] 平田浩一，『累円術無寄』について－算変座標で解く－，数学史研究，Ⅲ-1-3(2023)，117-120.
[7] 平田浩一，算変座標の基礎（1)，松山大学論集，35-3（2023)，19-72.
[8] 平田浩一，算変座標とシュタイナー円鎖，松山大学創立百周年記念論文集（2023)，51-72.
[9] 平田浩一，算変座標の基礎（2)，松山大学論集，36-1（2024)，61-126.
[10] 平田浩一，算変座標の基礎（3)，松山大学論集，37-4（2025)，79-129.