数学史研究 III 期 1 巻 3 号 (2023), 117-120

研究発表会要旨

『累円術無寄』について —算変座標で解く— *

平田浩一 †

1. はじめに

第 18 回全国和算研究大会秋田大会において論文 [3] について研究発表を行った折に、鳴海風氏の [2] p. 119 に載っている小和田門人らの累円術の問題は算変座標を用いると簡単に解くことができると紹介した。この研究では [1] を資料としてその問題と算変座標を用いた解法を紹介する。

2. 算変座標

論文 [3] での算変座標について簡単にまとめる。円に向きをつけたものを**有向円**と呼ぶ。有向円に対しては半径 r に、反時計回りなら正、時計回りなら負と符号をつけたものを**符号つき半径**と呼ぶ。2 つの有向円 c_1 と c_2 の**反転距離** $s(c_1, c_2)$ を、符号つき半径 r_1, r_2 と中心間の距離 d を用いて次の式で定める。

$$s(c_1, c_2) = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}$$

3 つの有向定円 c_1, c_2, c_3 が与えられたとき、有向円 c の算変座標 $[s_1, s_2, s_3]$ を

$$[s_1, s_2, s_3] = [s(c, c_1), s(c, c_2), s(c, c_3)]$$

により定義する。算変座標に対して 3 有向定円 c_1, c_2, c_3 を基準 3 円とよぶ。算変座標は有向円を決定する座標系で、与えられた算変座標に対して有効円が定まる[1]。算変座標から符号つき半径を求める公式が半径公式である。一般の半径公式 [3, 定理 5] はかなり複雑な式となる。

ここではすべての円が反時計回りで基準 3 円が互いに外接する場合だけを考えることにする。その場合の半径公式は次の定理 [3, 定理 6] である。

---

* 受理日：2022 年 12 月 12 日

† 松山大学、愛媛和算研究会、khirata@g.matsuyama-u.ac.jp

[1] 算変座標に対し有向円は 2 つ得られる。その 2 円は互いに基準 3 円に直交する円による反転像となっているため（[3, 補題 17]）、求める円がどちらなのかを判定することが容易である。

定理 （半径公式） 基準 3 円 c_1, c_2, c_3 が互いに外接していてそれぞれの符号つき半径を r_1, r_2, r_3 とする。有向円 c の算変座標 $[s_1, s_2, s_3]$ が与えられたとき，有向円 c の符号つき半径 r は

$$\begin{aligned} p &= r_1(r_2+r_3)s_1 + r_2(r_3+r_1)s_2 + r_3(r_1+r_2)s_3 \\ q &= r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)(1+s_1s_2+s_2s_3+s_3s_1) \\ r &= \frac{2r_1r_2r_3}{p \pm 2\sqrt{q}} \end{aligned}$$

により定まる

[1] の問題を解くために反転距離に関する補題を用意する。数列 $\{a_n\}$ を $a_n = 2n^2 - 1$ とするとき、次の補題は図 1 に示すように反転を用いて簡単に証明できる。

補題 接する外円と内円の間に円鎖 $c_0, c_1, \ldots, c_n$ があるとき $s(c_0, c_n) = a_n$ が成り立つ。

3. 『累円術無寄』の問題

問題 図 2 のように外円内に上中下累円がある（この図の累円数 9 円は仮の値である)。中円径 451 寸、下円径 396 寸のとき（上中下の円数は等しい)、上円径はいくらか。ただし、甲円径は外円径の半分とする。答曰、上円径 492 寸。

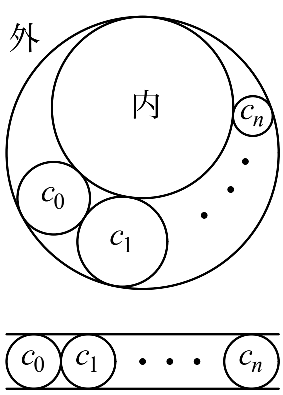

図 1 補題

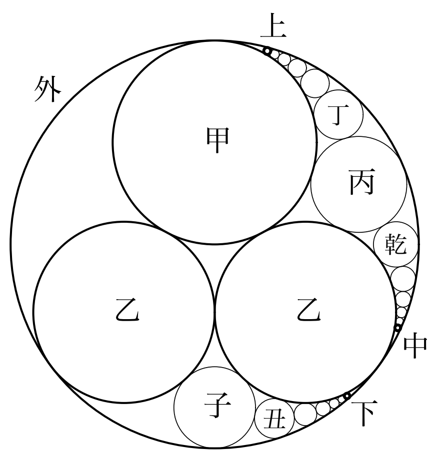

図 2 問題

（解答）円の向きはすべて反時計回りとし、外円の半径を R とする。甲円を c_1 とするときその半径は $r_1 = \frac{1}{2}R$ である。左側の乙円を c_2 右側の乙円を c_3 とし、半径を r_2 とする。c_1, c_2, c_3 を基準 3 円として算変座標を導入する。

外円は基準 3 円に内接することからその算変座標は $[-1,-1,-1]$ となるので、半径公式に $[s_1,s_2,s_3]=[-1,-1,-1]$ と $r_1=\frac{1}{2}R,\ r_2=r_3,\ r=R$ を代入し、方程式を解くことにより乙円半径が $r_2=\frac{4}{9}R$ と求まる[2]。これで甲円と乙円の半径が決まるので、基準 3 円 c_1,c_2,c_3 に対する半径公式を整理すると

$$r=\frac{8R}{18s_1+17s_2+17s_3-30\sqrt{1+s_1s_2+s_2s_3+s_3s_1}} \tag{1}$$

となる[3]。

上円については、外円と甲円に挟まれた円鎖「左乙, 右乙, 丙, 丁, $\cdots$, 上」において、左乙円が 0 番で上円が n 番とすれば、補題により上円の算変座標は $[1,a_n,a_{n-1}]$ である。同様に中円については、外円と右乙円に挟まれた円鎖「左乙, 甲, 丙, 乾, $\cdots$, 中」において、左乙円が 0 番で中円が n 番とすれば、中円の算変座標は $[a_{n-1},a_n,1]$ である。下円については、外円と右乙円に挟まれた円鎖「甲, 左乙, 子, 丑, $\cdots$, 下」において、甲円が 0 番で下円が n 番とすれば、下円の算変座標は $[a_n,a_{n-1},1]$ である。このように円の個数を数えるだけで、上円・中円・下円の算変座標を求めることができる。

上円の半径を x、中円の半径を y、下円の半径を z とするとき、上で求めた算変座標を半径公式 (1) に代入することで

$$x=\frac{4R}{4n^2-4n+9},\quad y=\frac{4R}{5n^2-6n+9},\quad z=\frac{4R}{5n^2-4n+8} \tag{2}$$

を得る。

この問題が普通の数学の問題であれば、$y=\frac{451}{2},\ z=198$ により方程式

$$\frac{y}{z}=\frac{5n^2-4n+8}{5n^2-6n+9}=\frac{451}{396}=\frac{41}{36}$$

を作り、その整数解を求めることで $n=3$ となる。またこのとき $R=\frac{4059}{2},\ x=246$ となるので、上円径 492 寸を得る。

しかし和算の問題としては、3 変数 x,y,z の関係式を求めなければならないので少し厄介である。式 (2) から R を消去し

$$x(4n^2-4n+9)=y(5n^2-6n+9)=z(5n^2-4n+8) \tag{3}$$

とし、この 2 式から n を消去することで

$$(153y^2-178yz+153z^2)x^2-138yz(y+z)x+145y^2z^2=0 \tag{4}$$

---

[2] この計算はデカルトの円定理に相当する。

[3] もう一方の解は基準 3 円に囲まれた小さな領域の中にあり、半径もより小さな値となる。

となる[4]。この x の 2 次方程式を解くことで

$$x = \frac{69yz(y+z) + 22yz\sqrt{73yz - 36y^2 - 36z^2}}{153y^2 - 178yz + 153z^2} \quad (n \geqq 2) \tag{5}$$

を得る[5]。

4. 『累円術無寄』の解義

最後に [1] ではどのように問題を解いているかを簡潔に説明する[6]。乙円径は 4 円（外甲左乙右乙）の中心間の距離を調べ、三平方の定理を用いることで乙円径を求めている。

上円に至る円鎖については、丙円は円中三円術（デカルトの円定理）を用いて円径を求め、その過程で円鎖の隣接 2 円径の関係式を導き、その関係式を用いて順に丁円、戊円、己円、庚円まで（$n \leqq 6$）の円径を計算している。その後は式 (2) の x 式（$1 \leqq n \leqq 6$）の分母の値の数列 $\{9, 17, 33, 57, 89, 129\}$ に着目し、その数列の一般項を推定することで任意の n に対する上円径を導いている。さらに外円径と上円径が与えられたときに項数 n を計算する 2 次方程式も導いている。

中円と下円に至る円鎖についても同様な計算を行なうことで、式 (2) の 3 式と同等の結果を得ている。その後は、式 (2) から式 (3) と式 (4) を経て式 (5) を導いている。

5. まとめ

和算書 [1] の問題を題材として算変座標を用いた計算例を紹介した。論文 [3] の最重要公式である距離公式は一度も使うことなく、半径公式と補題のみでの解法となった。算変座標を用いることで式 (2) を導くまでの計算の手数を相当に短縮することができた。

参考文献

[1] 小和田吉泰、累円術無寄、東北大学デジタルコレクション、林集書 0417.
[2] 鳴海風、遊歴算家・山口和「奥の細道」をゆく、ちくま学芸文庫、2022.
[3] 平田浩一、算変法不変式がつくる座標系について、松山大学論集、34-1 (2022)、57–103.

[4] 式 (4) の左辺は斉次多項式なので、この方程式は実射影平面の 4 次曲線を表している。また式 (2) は n を実数とみなすとき、その 4 次曲線のパラメータ表示である。

[5] 解の公式で $\pm$ のどちらを選択するかは厄介な問題であるが、式 (2) の点を曲線 (4) 上にプロットすることで曲線のどちら側に属しているかを確認できる。整数 n に対しては、$n = 0, 1$ のとき $-$ 側で、$n \leqq -1$, $n \geqq 2$ のとき $+$ 側である。

[6] [1] の原文での項の番号はこの研究での n とは 1 つずれているので注意。