算変法不変式がつくる座標系について

平田 浩一（松山大学経営学部・愛媛和算研究会）

1　はじめに

和算の図形問題では，多数の円が互いに接している図が与えられ，その中の特定の円の直径を求めよという問題が数多くある。このような問題を解くために，『観新考算変』で法道寺善が述べている方法が，現在の反転法や算変法の考え方の元となっている [2]。

この研究 [3] では，反転法や算変法のアイデアをさらに発展させ，円を決定する座標系として算変座標を導入する。さらに，その座標系に魂を吹き込む 2 つの公式，半径公式と距離公式を導く。この算変座標，半径公式，距離公式を活用することで反転図を描くことなく，かつ反転法や算変法に匹敵する問題解法の手法を確立することがこの研究の目標である。

2　反転距離

算変法では，反転で変化することのない 2 円の位置関係を不変式と呼び，不変式を利用して問題を解いている。その不変式を精緻に定義しているのが [1] の**反転距離**であり，2 つの有向円 c, c' に対して反転距離 $s(c, c')$ が複比を用いて定義される。それを複比を用いずに述べると，2 つの有向円の符号付き半径 r, r' を，反時計回りなら正で時計回りなら負とし，2 円の中心間の距離を d とするとき，反転距離は

$$s(c, c') = \frac{d^2 - r^2 - r'^2}{2rr'} \tag{1}$$

となる。

この反転距離は反転不変であるため，この距離を円の基本性質であると考えて，座標系を定義する。

3　算変座標

平面上の 3 つの有向円 c_1, c_2, c_3 を固定するとき，任意の有向円 c に対し 3 つの反転距離

$$[s_1, s_2, s_3] := [s(c, c_1), s(c, c_2), s(c, c_3)]$$

が与えられれば，円 c が決定できるのではと思い調べてみた。その結果，ある条件のもとでは円が決定できることが判明した。そこで，円 c に対し $[s_1, s_2, s_3]$ を算変座標と呼び、3 定円 c_1, c_2, c_3 を基準 3 円と呼ぶことにした。

一般の基準 3 円では半径公式，距離公式がかなり複雑な式となる。そこで以下では，有効円はすべて反時計回りとし，基準 3 円 c_1, c_2, c_3 は互いに外接している場合に話を限定する。また，円 c もその 3 円に囲まれた領域にある場合に限定する。

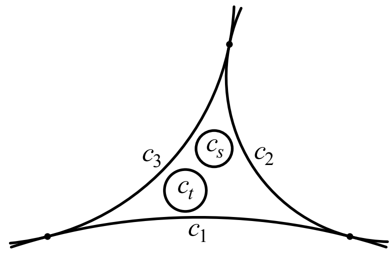

図 1　互いに外接する基準 3 円

4　半径公式

基準 3 円と円 c が与えられたときにその算変座標 $[s_1, s_2, s_3]$ は式 (1) を用いて計算できる。問題はその逆である。算変座標が与えられたとき，円 c が決定できなければならない。

定理 1（半径公式）　基準 3 円 c_1, c_2, c_3 が互いに外接していてそれぞれの符号つき半径を r_1, r_2, r_3 とする。有向円 c の算変座標 $[s_1, s_2, s_3]$ が与えられたとき，円 c の符号つき半径 r は

$$p = r_1(r_2 + r_3)s_1 + r_2(r_3 + r_1)s_2 + r_3(r_1 + r_2)s_3$$
$$q = r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3)(1 + s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1)$$

とおくとき

$$r = \frac{2r_1r_2r_3}{p \pm 2\sqrt{q}}$$

である。

円 c の半径が求まれば式 (1) により基準 3 円の中心から円 c の中心までの距離がすべて求まるので円 c が決定できる。半径公式から r が 2 つ求まるが，基準 3 円に囲まれた領域に含まれるのは r の絶対値の小さい方である。

5　距離公式

平面上の 2 点の座標が与えられたときその 2 点間の距離を求める公式，すなわち三平方の定理は平面幾何の基礎となる定理である。算変座標においても同様である。

定理 2（距離公式）　互いに外接する基準 3 円 c_1, c_2, c_3 のもとで 2 有向円の算変座標を $c_s[s_1, s_2, s_3], c_t[t_1, t_2, t_3]$ とする。このとき反転距離 $x = s(c_s, c_t)$ は

$$\begin{aligned}\rho &= s_1t_2 + s_2t_1 + s_2t_3 + s_3t_2 + s_3t_1 + s_1t_3\\ \tau_s &= 1 + s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1\\ \tau_t &= 1 + t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1\end{aligned}$$

とおくとき

$$x = \frac{\rho}{2} \pm \sqrt{\tau_s\tau_t}$$

である。

特に $x = 1$ となるのは 2 円が外接する場合であり，距離公式から 2 円が外接する条件は

$$(\rho - 2)^2 - 4\tau_s\tau_t = 0 \tag{2}$$

となる。この式の左辺を $J(c_s, c_t)$ と表すことにする。

6　応用

外接条件 (2) を使うことで，反転図を用いることなく算変座標が計算できることを具体例で示す。

例 1　図 2 の 4 円 c_s, c_t, c_u, c_v の算変座標を求めよ。

円 c_s は基準 3 円に直接外接しているのでその算変座標は $[1, 1, 1]$ である。円 c_t の算変座標を $[t, 1, 1]$ $(t > 1)$ とすると，対称性により $c_u[1, t, 1], c_v[1, 1, t]$ となる。外接条件より

$$J(c_s, c_t) = 4(t - 7)(t + 1) = 0$$

となり，$t = 7$ を得る。

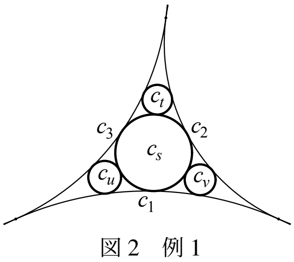

図 2　例 1

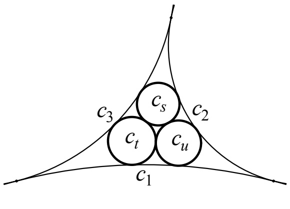

図 3　例 2

例 2　図 3 の 3 円 c_s, c_t, c_u の算変座標を求めよ。

円 c_s の算変座標を $[s, 1, 1]$ $(s > 1)$ とすると，対称性により $c_t[1, s, 1], c_u[1, 1, s]$ となる。外接条件より

$$J(c_s, c_t) = (s - 3)(s + 1)^2(s + 5) = 0$$

となり，$s = 3$ を得る。

例 3　図 4 の 4 円 c_s, c_t, c_u, c_v の算変座標を求めよ。

4 円を $c_s[s, 1, 1], c_t[1, t, 1], c_u[1, 1, t], c_v[1, v, v]$ とおく。連立方程式

$$J(c_s, c_t) = 0, \quad J(c_s, c_v) = 0, \quad J(c_t, c_v) = 0$$

を解いて $s, t, v > 1$ なる解を求めると

$$s = 11 - 4\sqrt{5}, \quad t = v = 2 + \sqrt{5}$$

を得る。

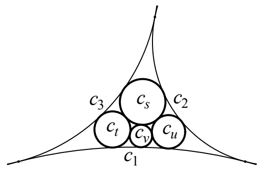

図 4　例 3

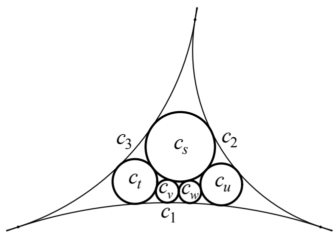

図 5　例 4

例 4　図 5 の 5 円 c_s, c_t, c_u, c_v, c_w の算変座標を求めよ。

5 円を $c_s[s, 1, 1]$, $c_t[1, t, 1]$, $c_u[1, 1, t]$, $c_v[1, v, w]$, $c_w[1, w, v]$ とおく。連立方程式

$$J(c_s, c_t) = 0,\ J(c_v, c_w) = 0,\ J(c_s, c_v) = 0,\ J(c_t, c_v) = 0$$

を解いて，$s, t, v, w > 1$ かつ $v > w$ なる解を求めると

$$s = \frac{5}{3}, \quad t = 5, \quad v = 7, \quad w = 5$$

を得る。

このように，反転図を書かなくても方程式を解くだけで算変座標が求まる。半径が必要であれば，基準 3 円の符号つき半径と算変座標を半径公式に代入することで半径はすぐに計算できる。

参考文献

[1] P. L. Bowers and M. K. Hurdal, Planar Conformal Mappings of Piecewise Flat Surfaces, *Visualization and Mathematics III*, Springer, (2003), 3–34 .

[2] 田部井勝稲・松本登志雄,『高校数学で解く日本の図形問題 反転法と算変法』, 一粒書房, 2014.

[3] 平田浩一, 算変法不変式がつくる座標系について, 松山大学論集, 34-1 (2022), 57–103.