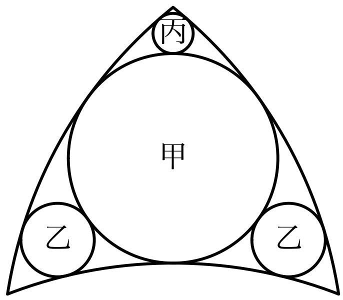
「所懸和霊大明神社筭涂」現代解について

平田　浩一

第 45 回愛媛和算研究会 （2021 年 8 月 1 日）

1　問題

今有如圖以三等弧背圍甲圓其罅容乙圓與丙圓只云甲圓徑若干乙圓若干問得内丙圓徑術如何



今、図のように 3 つの等しい円弧が甲円を囲んでいる。甲円とその隙間に乙円と供に丙円を入れる。甲円の直径と乙円の直径が分かったとき、丙円の直径を求める方法を問う。

この問題は六斜術（[1] 補題 18）とスチュワートの定理（[1] 補題 20）を用いると見通しがよい。その 2 つの公式は定理として付録にまとめている。

2　現代解

図 1 のように、3 つの等しい円弧を $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$、$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$、$\overset{\frown}{\mathrm{CA}}$ とする。このとき、$\triangle$ABC は正三角形である。弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ の中心を O、弧 $\overset{\frown}{\mathrm{CA}}$ の中心を P、甲円の中心を K、2 つの乙円のうち右側の円の中心を L，丙円の中心を M とする。円 O と円 P の半径を R、甲円の半径を r_1、乙円の半径を r_2，丙円の半径を r_3 とする。

円 O は円 P を点 C を中心として 60° 回転させたものなので、$\triangle$OPC は正三角形であり、OP = OC = R である。5 点 O, P, K, L, M 間の距離は

$$\mathrm{PM} = R - r_3, \quad \mathrm{PK} = R - r_1, \quad \mathrm{PO} = R, \quad \mathrm{MK} = r_1 + r_3, \quad \mathrm{KO} = R + r_1,$$
$$\mathrm{KL} = r_1 + r_2, \quad \mathrm{PL} = R - r_2, \quad \mathrm{OL} = R + r_2$$

である。

ここで，4 角形 KPOL に六斜術を適用すると，

$$(30r_1r_2 - 9r_1^2 - 9r_2^2)R^2 - 64r_1^2r_2^2 = 0$$

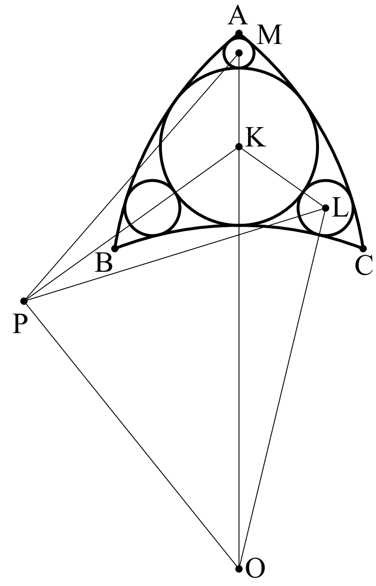


図 1　現代解

という関係式が得られる。ここで，

$$w = 30r_1r_2 - 9r_1^2 - 9r_2^2 \tag{1}$$

とおくことで，

$$R = \frac{8r_1r_2}{\sqrt{w}} \tag{2}$$

となる[*1]。次に，三角形 POM と点 K にスチュワートの定理を用いると

$$(3R^2 + 4Rr_1 + 4r_1^2)r_3 - R^2r_1 + 4r_1^3 = 0$$

となり，整理することで

$$r_3 = \frac{R^2r_1 - 4r_1^3}{3R^2 + 4Rr_1 + 4r_1^2} \tag{3}$$

となる。式 (2) を (3) に代入し分母分子に $\dfrac{w}{4r_1^2}$ をかけて整理することで，

$$r_3 = \frac{16r_1r_2^2 - r_1w}{48r_2^2 + 8r_2\sqrt{w} + w} = \frac{9r_1^3 - 30r_1^2r_2 + 25r_1r_2^2}{(4r_2 + \sqrt{w})^2 + 32r_2^2} = \frac{r_1(3r_1 - 5r_2)^2}{(4r_2 + \sqrt{w})^2 + 32r_2^2}$$

となる。

以上をまとめることで，解

$$w = 30r_1r_2 - 9r_1^2 - 9r_2^2$$
$$r_3 = \frac{r_1(3r_1 - 5r_2)^2}{(4r_2 + \sqrt{w})^2 + 32r_2^2}$$

が得られる。

[*1] $r_1 > 3r_2$ のとき $w > 0$ となる。

3　付録

定理 1（六斜術）　平面上に 4 点 O, A, B, C があり、その間の距離が、OA = a, OB = b, OC = c, BC = x, CA = y, AB = z と表されるとき、

$$
\begin{aligned}
&a^2x^2(-a^2+b^2+c^2-x^2+y^2+z^2)+b^2y^2(a^2-b^2+c^2+x^2-y^2+z^2)\\
&+c^2z^2(a^2+b^2-c^2+x^2+y^2-z^2)-(a^2b^2z^2+b^2c^2x^2+c^2a^2y^2+x^2y^2z^2)=0
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

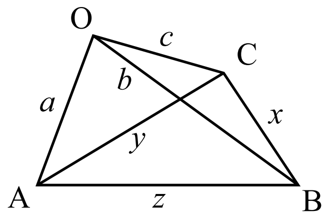


図 2　六斜術

次のスチュワートの定理は，六斜術の三点 A, B, C が同一直線上にある特別な場合と見なすことができる。

定理 2（スチュワートの定理）　△OAB の辺 AB 上の任意の点を P とし、OA = a、OB = b、AP = c、PB = d、OP = x、とする。このとき、

$$a^2d+b^2c=(c+d)(x^2+cd)$$

が成り立つ。

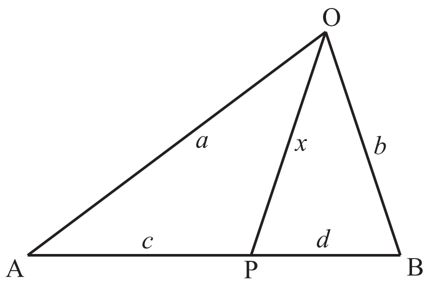


図 3　スチュワートの定理

参考文献

[1] 平田浩一・谷本賢治編著、「愛媛の算額研究 ～現代解法を通して～」、愛媛和算研究会、2017