外相似の四円定理と池田の定理について

平田浩一

第 45 回愛媛和算研究会（2021 年 8 月 1 日）

1　はじめに

外相似の四円定理と池田の定理は，どちらもその結論として 4 円の半径についての同じ等式を導いている。そのため類似する定理と見做されることが多い。この研究の目的は 2 つの定理の違いを明らかにすることである。まずは 2 つの定理の内容を説明することから始める。

1.1　池田の定理

池田の定理は、池田貞一が 1826 年に東都牛島長命寺に掲げた算額に書かれた問題に端を発するもので、同じ年に出版された白石長忠の『社盟算譜』に収録され今日に伝わっている。算額に書かれた問題と解を現代風に表すと次のようになる。

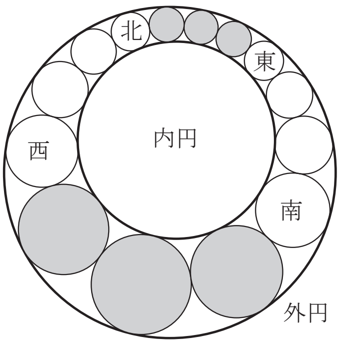

図 1　池田貞一の算額の図

図 1 のように、外円と内円との間に偶数個の円が環状に接している。このとき 2 組の相対する円の直径を東, 西と南, 北とすれば、

$$\frac{1}{東}+\frac{1}{西}=\frac{1}{南}+\frac{1}{北} \tag{1}$$

という美しい関係式が成り立つ。

図 1 は外円と内円の間に 14 個の円が接している図となっている。一般には，外円と内円の間に $2n$ 個の円が接しているときに，東円から数えて n 番目の円が西円で，南円から数えて n 番目の円が北円であるとき，式 (1) が成立するというのが池田の定理である。

この定理の証明 [1] には，反転により図 1 を図 2 のように外円と内円が同心円になるように移すことによ

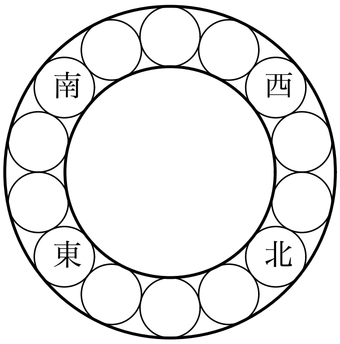

図 2　反転により内円と外円を同心円にする

り，すべての円の半径が等しくなりかつ東西南北 4 円の中心を結ぶと長方形になるという性質が用いられている。

1.2　外相似の四円定理

外相似の四円定理は論文 [2] で次のように述べられている。

半径が異なり互いにその外部にある 4 円 C_1, C_2, C_3, C_4 において，図 3 のように 2 円ずつの共通外接線の交点が 2 組一致しているものとする。このとき，4 円の半径 r_1, r_2, r_3, r_4 に対し

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$$

という関係式が成り立つ。

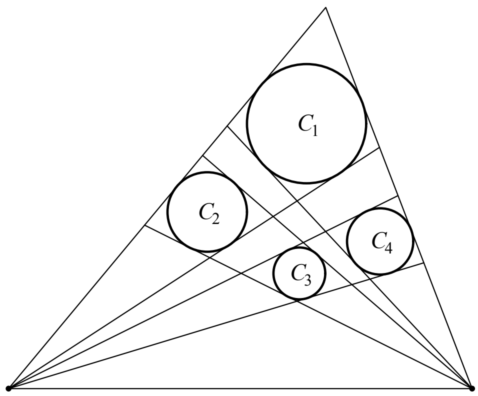

図 3　外相似の四円定理

池田の定理と外相似の四円定理は仮定は異なっているが，結論の式は全く同じものである。この両者の関係について考察するのがこの研究の目的である。

2　定義

この節では 2 つの定理の関係を明らかにするための用語を定義する。

定義 1　円 C による反転で円 C_1 が円 C_2 に移るとき，円 C を 2 円 C_1, C_2 の**中円**と呼ぶ。

定義 2　円 C による反転で円 C_1 が円 C_2 に移りかつ円 C_3 が円 C_4 に移るとき，円 C を C_1, C_2 と C_3, C_4 の**共通中円**と呼ぶ。

中円と共通中円は反転不変な性質である。

2.1　池田型 4 円

定義 3　互いに外部にある 4 円 C_1, C_2, C_3, C_4 が次の条件 (1)(2) を満たすとき，**池田型 4 円**と呼ぶことにする（図 4）。

(1) C_1, C_2 と C_3, C_4 が共通中円 C_m を持つ
(2) C_2, C_3 と C_4, C_1 が共通中円 C_n を持つ

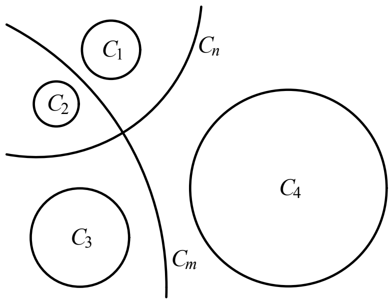

図 4　池田型 4 円

池田型 4 円は，C_m と C_n の交点の 1 つを反転中心として反転することにより，C_m と C_n は 2 直線 l_m, l_n に移る（図 5）。4 円 C_1, C_2, C_3, C_4 の反転像をそれぞれ C'_1, C'_2, C'_3, C'_4 とすると，l_m による反転（線対称移動）で 2 円 C'_1, C'_4 がそれぞれ C'_2, C'_3 に移り，l_n による反転で 2 円 C'_1, C'_2 がそれぞれ C'_4, C'_3 に移ることになる。このようになるためには l_m と l_n は直交していて，4 円の半径が等しく，さらに 4 円の中心は長方形をなしていなければならない。従って，反転は角度を保つ変換であることから，C_m と C_n も直交することになる。このことにより，次の 4 つの補題が成立する。

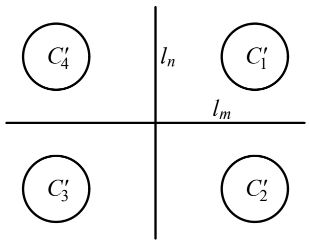

図 5　池田型 4 円の反転像

補題 1　池田型 4 円の 2 つの共通中円 C_m と C_n は直交している。

補題 2　4 円が池田型 4 円であるための必要十分条件は，ある反転によりその反転像が（図 5 のように）4 円の中心を結ぶと長方形をなしかつ 4 円の半径が等しくなることである。

補題 3　池田型 4 円の反転像も池田型 4 円である。

補題 4　池田の定理に現れる 4 円は池田型 4 円である。

2.2　外相似型 4 円

定義 4　互いに外部にある 4 円 C_1, C_2, C_3, C_4 が次の条件 (1)(2) を満たすとき，外相似型 4 円と呼ぶことにする（図 3)。

(1) C_1, C_2 の共通外接線の交点と C_3, C_4 の共通外接線の交点が一致する

(2) C_2, C_3 の共通外接線の交点と C_4, C_1 の共通外接線の交点が一致する

外相似型 4 円の定義は共通外接線という反転不変ではない性質を用いて定義されているので，外相似型 4 円の反転像は一般には外相似型 4 円とはならない。

2.3　半径逆数和型 4 円

定義 5　4 円 C_1, C_2, C_3, C_4 の半径が

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$$

を満たすとき，半径逆数和型 4 円と呼ぶことにする。

池田型 4 円と外相似型 4 円は，4 円の位置関係を記述している定義であった。それに対して半径逆数和型 4 円は大きさについての条件だけであって，円の位置については何も触れていない。

3　相互関係

この節では，池田型 4 円，外相似型 4 円，半径逆数和型 4 円の相互関係について調べる。

定理 1　池田型 4 円は外相似型 4 円である。

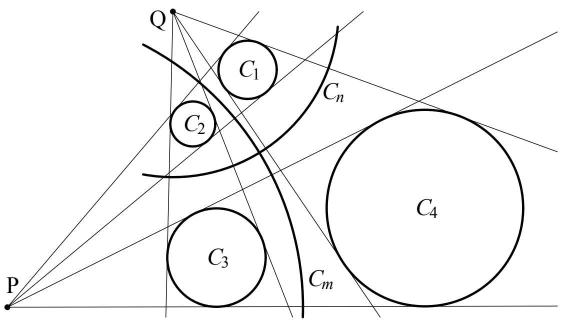

図 6　池田型 4 円は外相似型 4 円

（証明）図 6 のように，共通中円 C_m の中心を P とすれば，反転の定義により C_1, C_2 の共通外接線の交点は P で，C_3, C_4 の共通外接線の交点も P となり，一致する。共通中円 C_n についても同様である。従って，外相似型 4 円 である。 □

この定理 1 は池田の定理のより強いバージョンと見なすことができる。

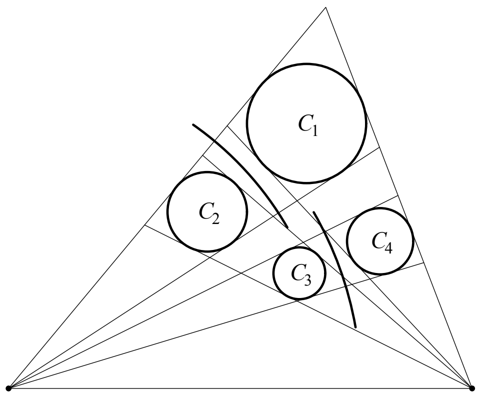

図 7　外相似型 4 円で池田型 4 円ではない例

定理 1 の逆は成り立たない。外相似型 4 円は多くの場合において，次の図 7 のように C_1, C_2 の中円と C_3, C_4 の中円は一致しないことから，池田型 4 円とはならない。

定理 2（外相似の四円定理）　外相似型 4 円は半径逆数和型 4 円である。

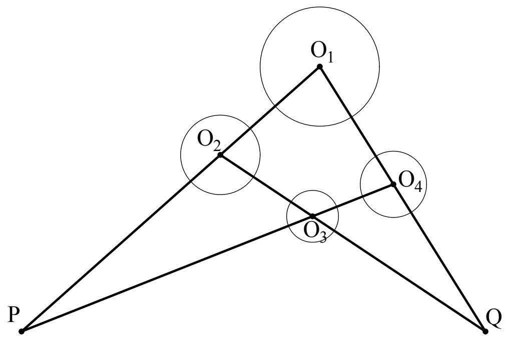

図 8　外相似型 4 円は半径逆数和型 4 円

（証明）図 8 のように，4 円の中心を $\mathrm{O_1, O_2, O_3, O_4}$ とし共通外接線の交点を $\mathrm{P, Q}$ とする。三角形 $\mathrm{O_1PO_4}$ と直線 $\mathrm{O_2Q}$ にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{O_1O_2}}{\mathrm{O_2P}} \cdot \frac{\mathrm{PO_3}}{\mathrm{O_3O_4}} \cdot \frac{\mathrm{O_4Q}}{\mathrm{QO_1}} = 1$$

これを 4 円の半径で表すと

$$\frac{r_1 - r_2}{r_2} \cdot \frac{r_3}{r_4 - r_3} \cdot \frac{r_4}{r_1} = 1$$

分母を払い整理することで

$$r_2r_3r_4 + r_1r_2r_4 = r_1r_3r_4 + r_1r_2r_4$$

さらに両辺を $r_1r_2r_3r_4$ で割ることで

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$$

となる。 □

定理 2 の逆が成り立たないことは明らかである。

定理 1 と定理 2 により次の系が得られる。これがいわゆる池田の定理である。

系 1（池田の定理） 池田型 4 円は半径逆数和型 4 円である。

4 まとめ

以上により，次のような包含関係が得られたことになる。

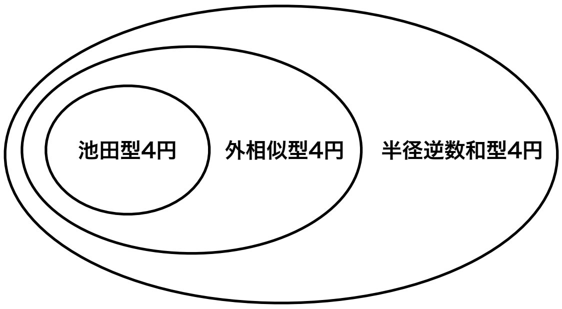

図 9 包含関係

この包含関係により，池田の定理と外相似の四円定理の関係と相違が明らかとなった。

参考文献

[1] 田部井勝稲・松本登志雄,『高校数学で解く日本の図形問題反転法と算変法』, 一粒書房,2014。
[2] 小曽根淳,『和算の曲率問題について』，数学史研究，230，pp. 18–29，(2018)